Cours de mathématiques

Cours/TD/DM/DS + corrections

Algèbre linéaire
Analyse
Analyse harmonique
Equations différentielles

Emmanuel Montseny
Céline Casenave

Notions d'Algèbre Linéaire

E. Montseny

Table des matières

1 Espaces Vectoriels **3**
- 1.1 Définitions . . . 3
- 1.2 Sous-espaces vectoriels . . . 4
- 1.3 Familles libres et génératrices . . . 4
- 1.4 Bases, dimension . . . 6

2 Applications linéaires **7**
- 2.1 Rappels sur les applications . . . 7
- 2.2 Applications linéaires . . . 7

3 Matrices **9**
- 3.1 Des applications linéaires aux matrices . . . 9
- 3.2 Définitions et notations . . . 9
- 3.3 Structure de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ . . . 10
- 3.4 Propriétés et opérations sur les matrices . . . 12
- 3.5 Matrices de changement de base . . . 15

4 Réduction d'endomorphismes **16**
- 4.1 Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres . . . 16
- 4.2 Diagonalisation de matrices . . . 17

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni des lois usuelles d'addition et de multiplication. On utilisera souvent l'abréviation e.v. pour espace vectoriel. Bien que la plupart des résultats soient généralisables, nous travaillerons essentiellement sur des esapces vectoriels de dimension finie.

1 Espaces Vectoriels

1.1 Définitions

Soient E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On note $+$ (resp. $.$) une loi interne sur E (resp. loi externe), c'est-à-dire opérant sur deux éléments de E (resp. sur un élément de E et un élément de $\mathbb{K}$) :

$$+ : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array} \quad , \qquad . : \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \to E \\ (x,\lambda) \mapsto \lambda.x \end{array}$$

Définition 1

On dit que $(E,+,.)$ est un ***espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$ *(ou $\mathbb{K}$-e.v) si :*

- *$(E,+)$ est un groupe commutatif (ou abélien) :*
  - *la loi $+$ est commutative sur E : $\forall\, x,y \in E,\ x+y = y+x$*
  - *la loi $+$ est associative : $\forall\, x,y,z \in E,\ x+(y+z) = (x+y)+z$*
  - *il existe un élément neutre dans E, noté 0_E, vérifiant : $\forall\, x \in E,\ x+0_E = x$*
  - *tout élément x de E admet un symétrique pour $+$, noté $(-x)$, tel que : $x+(-x) = 0_E$*
    (moyen mnémotechnique pour les axiomes du groupe commutatif : CANS)
- *La loi externe $.$ vérifie :*
  - *$\forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$,*
  - *$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x,y \in E,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$*
  - *$\forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$*
  - *$\forall\, x \in E,\ 1_{\mathbb{K}}.x = x$*

Terminologie : Les éléments de $\mathbb{K}$ sont communément appelés des **scalaires** et ceux de E des **vecteurs**.

Attention : Dans ce chapitre, on veillera à toujours garder à l'esprit la nature des objets que l'on manipule. Ne pas confondre la loi sur le corps $\mathbb{K}$ et la loi sur l'espace vectoriel E, qui agissent sur des objets de nature différente. Par exemple, lorsqu'on écrit $(\lambda\mu).x$, $\lambda\mu$ est un produit entre deux éléments du corps $\mathbb{K}$, alors que le $.$ désigne le produit entre un élement de $\mathbb{K}$ (ici $\lambda\mu$) et un élément x de E. La notation $+$ est quant à elle utilisée pour $\mathbb{K}$ et E.

Exemple :

1. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e.v s'il est muni des lois $+$ et $.$ définies pour tous $x,y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} x+y &:= (x_1+y_1, ..., x_n+y_n) \\ \lambda.x &:= (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \end{aligned}$$

2. $\mathcal{C}^0(\mathcal{I},\mathbb{R}) = \{\text{fonctions continues de } \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v s'il est muni des lois $+$ et $.$ définies pour tous $f,g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in I,\ (f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \text{et} \quad \forall\, x \in I,\ (\lambda.f)(x) := \lambda f(x)$$

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

$$\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$$

Démonstration : ($\Leftarrow$) $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) \Leftrightarrow \lambda.0_E = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ donc $\underbrace{\lambda.0_E + (-(\lambda.0_E))}_{0_E} = \lambda.0_E + \underbrace{\lambda.0_E + (-(\lambda.0_E))}_{0_E}$ d'où $0_E = \lambda.0_E + 0_E$ et donc $0_E = \lambda.0_E$

($\Rightarrow$)Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tels que $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors $x = (\lambda^{-1}\lambda).x = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E$. ■

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3

*Soit un $\mathbb{K}$-e.v E et une partie **non vide** $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v) de E si :*

1. *F est stable pour $+$: $\forall\, x, y \in F$, on a $x + y \in F$*
2. *F est stable pour $.$: $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall\, x \in F$, on a $\lambda.x \in F$.*

Remarque : Ces conditions peuvent se résumer à : F stable par combinaison linéaire, i.e. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall\, x, y \in F$, $\lambda.x + y \in F$.

Exemple : 1. $\mathbb{R}\times\{0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, tout ensemble de la forme $\{(x, \lambda.x),\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathcal{C}^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}) = \{$fonctions continuement différentiables de $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\}$ est un s.e.v de $\mathcal{C}^0(\mathcal{I}, \mathbb{R})$.

La proposition suivante est utile pour établir qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Proposition 4

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Démonstration : $(F, +)$ groupe commutatif :

► la commutativité et l'associativité de $+$ dans F découle des propriétés de $+$ dans E.

► neutre : comme F stable pour $+$, on a $(-1).x + x = ((-1) + 1).x = 0_E \in F$, donc 0_E neutre pour $+$ dans F.

► symétrique : $\forall\, x \in F$, $(-1).x \in F$ est le symétrique de x pour $+$, noté $-x$.

Les axiomes sur la loi $.$ se vérifient grâce aux propriétés de $.$ sur E. ■

1.3 Familles libres et génératrices

Définition 5

*Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $x_1, ..., x_p$ des éléments de E. On appelle **combinaison linéaire de** $x_1, ..., x_p$ tout élément de la forme :*

$$\lambda_1.x_1 + ... + \lambda_p.x_p, \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ pour tout } i = 1 : p.$$

On pourra noter cette combinaison : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i$.

Exemple : $E = \mathbb{R}^4$, soient x_1, x_2, x_3 des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Alors $y = 3.x_1 - 2.x_3$ est une combinaison linéaire de x_1, x_2, x_3

Définition 6

On dit que la famille $(x_1, ..., x_p)$ d'éléments de E est ***libre*** *si :*

$$\forall\ \lambda_1, ..., \lambda_p \text{ dans } \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0_{\mathbb{K}} \text{ pour tout } i = 1 : p.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est ***liée*** *:*

$$\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_p \text{ dans } \mathbb{K} \text{ non tous nuls tels que } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i = 0_E.$$

Lorsqu'une famille est libre, on dit aussi que les vecteurs qui la constituent sont **linéairement indépendants**.

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$. Les vecteurs $x_1 = (1, 2)$ et $x_2 = (-3, -6)$ sont liés car $3.x_1 + x_2 = 0$. En revanche, soit $x_3 = (-1, 3)$; la famille (x_1, x_3) est libre car $\forall\ \lambda_1, \lambda_3$ dans $\mathbb{K}$:

$$\lambda_1.x_1 + \lambda_3.x_3 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

Proposition-Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et A une partie non vide de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A est un s.e.v de E, appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** *A, et noté $Vect(A)$. C'est le plus petit s.e.v contenant A.*

Si de plus $Vect(A) = E$, on dit que A ***engendre*** *E, ou encore que la famille A est* ***génératrice****.*

Démonstration : ► Montrons que $Vect(A)$ est un s.e.v de E. Tout d'abord $Vect(A)$ est non vide puisqu'il contient évidemment 0_E (qui est combinaison linéaire de n'importe quels $a_i \in A$ avec des coefficients nuls). Ensuite, il est clair que $Vect(A) \subset E$ puisque ses éléments sont des combinaisons linéaires d'éléments de A, donc de E, et donc appartient à E puisque c'est un espace vectoriel. Enfin, montrons que $Vect(A)$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x, y \in E$. Alors :

$$\lambda.x + y = \lambda.\sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i.a_i + \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j.a_j = \sum_{i=1}^{r_1} (\lambda\lambda_i).a_i + \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j.a_j.$$

Il est clair que cette expression peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire d'élements de A :

$$\lambda.x + y = \sum_{i=1}^{r_3} \nu_i.a_i,$$

donc $\lambda.x + y \in Vect(A)$.

► Soit H un s.e.v tel que $A \subset H$. On a $Vect(A) \subset H$. En effet, soit $x \in Vect(A)$, alors x est une combinaison linéaire d'éléments de A, donc de H, et par stabilité de H, $x \in H$. Ainsi, tout s.e.v contenant A contient aussi $Vect(A)$, ce qui montre que $Vect(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. ■

1.4 Bases, dimension

Proposition-Définition 8

Une famille $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ d'éléments de E est une ***base*** *si elle est libre et génératrice, ce qui est équivalent à l'assertion suivante :*

$$\forall x \in E,\ \exists!\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i. \tag{1}$$

Dit autrement : tout élément x se décompose de manière unique sur la base $\mathcal{E}$. Les scalaires $\{x_i\}_{i=1:n}$ sont appelés ***coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$****.*

Démonstration : On va montrer l'équivalence entre la définition d'une base et l'assertion (1).

($\Rightarrow$) $\mathcal{E}$ base de E, donc $\mathcal{E}$ génératrice : tout élément x de E s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{E}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$. Cette décomposition est unique. En effet, si $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i.e_i$, alors $0_E = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i).e_i$, ce qui entraîne $x_i = x'_i$ puisque $\mathcal{E}$ est libre.

($\Leftarrow$) Si $\forall x \in E$, $\exists!\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, il est évident que la famille $\mathcal{E}$ est génératrice. Elle est également libre puisque $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0.e_i$ est, par unicité, la seule combinaison linéaire qui soit nulle. ■

Le notion de base est essentielle en algèbre linéaire. Elle permet d'établir que tout élément d'un espace vectoriel est entièrement caractérisé par un nombre dénombrable (fini dans notre cas) de coefficients.

Exemple : $\{e_i\}_{i=1:n}$ avec $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$, le 1 étant à la ième position, est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique.

Remarque importante : Il convient de bien faire la distinction entre un **vecteur** et ses coordonnées, surtout dans $\mathbb{R}^n$. Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet de nombres réels, il existe indépendemment d'une base (c'est simplement un ensemble de n nombres). Ses coordonnées sont des coefficients qui correspondent à sa décomposition sur une base donné (elles dépendent donc de la base). Ainsi, lorsqu'on écrit $(2, 1, 2)$ sans précision supplémentaire, il s'agit du vecteur $(2, 1, 2) \in \mathbb{R}^n$. La représentation d'un vecteur par ses coordonnées se faisant avec la même notation (n-uplet), il faudra impérativement associer une base à n-uplet de coordonnées (on remarque que l'écriture d'un vecteur coïncide avec ses coordonnées dans la base canonique).

Définition 9

Un espace vectoriel E est de ***dimension finie*** *s'il existe une famille finie génératrice de E.*

Théorème-Définition 10 (*admis*)

Tout espace de dimension finie admet au moins une base finie. Le nombre d'éléments d'une base de E, identique pour toutes les bases, est appelé ***dimension de E****.*

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$. La famille $((1, 1), (1, 0))$ est une base de E (le montrer !). Ainsi, E est un e.v de dimension 2.

Les résultats qui suivent sont utiles en pratique.

Proposition 11 (*admise*)

Soit E un espace de dimension n finie. Alors

- *Toute famille libre a au plus n éléments*
- *Toute famille génératrice a au moins n éléments.*
  Ainsi, toute famille libre de n éléments est une base. De même, toute famille génératrice de n éléments est une base.
- *Soit F un s.e.v de E. Si $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$.*

2 Applications linéaires

2.1 Rappels sur les applications

Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application. L'élément $y \in Y$ tel que $y = f(x)$ est l'**image** de x par f. Un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$ est un **antécédent** de y par f.

Définition 12

L'application f est dite :

- ***injective** si $\forall\ x_1, x_2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (unicité de l'antécédent s'il existe)*
- ***surjective** si $\forall\ y \in Y,\ \exists x \in X$ tel que $y = f(x)$ (existence d'au moins un antécédent)*
- ***bijective** si elle est injective et surjective (existence et unicité de l'antécédent)*

Définition 13

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et soient les applications $f : E \to F$, $g : E \to F$, $h : F \to G$. On définit les opérations suivantes :

- *la somme de f et g : $\forall x \in E,\ (f + g)(x) := f(x) + g(x)$*
- *la composition de h par f : $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) := h(f(x))$.*

2.2 Applications linéaires

Définition 14

*Soient E,F deux e.v. Une application $f : E \to F$ est **linéaire** (ou est un morphisme d'e.v) si :*

- *$\forall\ x, y \in E,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$*
- *$\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in E,\ f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$*

*Si de plus $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme**.*

Remarque : 1. Les deux conditions de linéarité peuvent se résumer en une seule : $\forall\ x, y \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y)$

2. Pour toute application linéaire f, on a $f(0_E) = 0_F$ car $f(0_E) = f(x - x) = f(x) - f(x) = 0_F$.

Attention : La notation . est utilisé à la fois pour la loi externe sur E et sur F.

Notation : L'ensemble des applications linéaires (resp. des endomorphismes) de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$). Ce sont tous deux des espaces vectoriels.

Exemple : 1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y) \end{array} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

2. $\delta : \begin{array}{l} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$

Définition 15

Soient E, F deux e.v, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle ***noyau de*** *f l'ensemble noté* $\ker(f)$ *défini par :*

$$\ker(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E\,;\, f(x) = 0_F\} \subset E.$$

On appelle ***image de*** *f l'ensemble noté* $\mathrm{Im}(f)$ *défini par :*

$$\mathrm{Im}(f) := f(E) = \{y \in F\,;\, \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\} \subset F.$$

Exemple : Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y \in \mathbb{R}$. On a $\ker(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y=0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x=-y\right\} = \{\lambda.(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, donc $\ker(f) = Vect((-1,1))$.
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ car $\forall z \in \mathbb{R}$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x+y=z$ (il en existe une infinité en fait).

Proposition 16

Soient E, F deux e.v, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a les assertions suivantes :

1. $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont respectivement des s.e.v de E et F*
2. *f injective* $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$
3. *f surjective* $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration : 1. Le fait que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des ṡ.e.v est immédiat.

2. ($\Rightarrow$) f injective. Soit $x \in \ker(f)$. On a alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$. L'injectivité de f entraine $x = 0_E$, donc $\ker(f) = \{0_E\}$.
($\Leftarrow$) $\ker(f) = \{0_E\}$. On a $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F$, et donc $x_1 - x_2 \in \ker(f)$, soit $x_1 = x_2$ puisque $ker(f) = 0_E$.
3. f surjective $\Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$. ■

Ce résultat est utile en pratique pour établir qu'un ensemble est un espace vectoriel : il suffit de l'exprimer comme étant le noyau d'une certaine application linéaire.

Exemple : 1. L'application $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y$ est surjective car $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, mais n'est pas injective car $\ker(f) \neq \{0_E\}$ (cf. exemple précédent)

2. L'ensemble $E_1 = (x,y,z)/x+2y-z=0$ est un espace vectoriel. En effet, soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x+2y-z$. Alors, $E_1 = ker(f)$, donc E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Le théorème qui suit est important dans la mesure où il relie la dimension de E et la dimension des noyau et image d'une application linéaire sur E ; il peut ainsi servir à établir certaines propriétés sur les applications (injective, bijective), les familles (liées, libres) etc.

Théorème 17 (*Théorème du rang*)

Soient E, F deux e.v de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f),$$

où $rg(f) := \dim(\mathrm{Im}(f))$ est appelé ***rang de*** *f.*

Remarque : On montre facilement que le rang de f est égal au rang de la famille de vecteurs (de F) constituée des images des vecteurs de la base de E : $\text{rg}(f) = rg(f(e_1), ..., f(e_n))$, soit encore le nombre de vecteurs libres parmis cette famille.

Exemple : Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$. Comme vu précédemment, $\ker(f) = Vect((-1, 1))$, donc $\dim(ker(f))=1$. On en déduit d'après le théorème du rang que $\dim(\text{Im}(f)) = rg(f) = \dim(\mathbb{R}^2) - 1 = 1$. On en déduit que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ (inclu et de même dimension) et donc que f est surjective.

3 Matrices

3.1 Des applications linéaires aux matrices

Soient E, F deux e.v, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_m)$ base de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $x \in E$. Alors x admet une (unique) décomposition sur $\mathcal{B}$:

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j.e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j.f(e_j) \quad (\text{avec } x_j \in \mathbb{K}).$$

Ainsi, on constate que la seule connaissance des images des vecteurs de base e_j par f suffit à caractériser l'application f. Comme $f(e_j) \in F$, on peut décomposer chaque $f(e_j)$ sur $\mathcal{B}'$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j. \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.e'_i.$$

L'application f est donc entièrement caractérisée par les coefficients $\{a_{ij}\}_{i=1:m,\ j=1:n}$ (scalaires de $\mathbb{K}$), que l'on regroupe dans un objet appelé **matrice** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Un intérêt des matrices est qu'elles permettent une manipulation simplifiée et intuitive des applications linéaires. Ainsi, les applications de $\mathcal{L}(E, F)$ seront avantageusement assimilées à leurs représentations matricielles. Le but des paragraphes qui suivent est de définir un ensemble de règles sur les matrices correspondant aux règles sur $\mathcal{L}(E, F)$.

3.2 Définitions et notations

Définition 18

*Une **matrice** est un ensemble (fini) de coefficients $\{a_{ij}\}_{i=1:m,\ j=1:n}$ de $\mathbb{K}$, généralement représentés par un tableau :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Si $m = 1$ (resp. $n = 1$) on parle de **matrice ligne** (resp. colonne). On utilise souvent les termes de vecteur ligne et vecteur colonne.*
*Si $m = n$, on dit que la matrice est **carrée**.*

Notations : – On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à éléments dans $\mathbb{K}$ de m lignes et n colonnes, et plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour les matrices carrées de taille $n \times n$.

– Un élément x de E sera représenté par ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ considérée pour E, la matrice colonne correspondante étant notée $[x]_{\mathcal{B}}$ (ou x si aucune confusion n'est à craindre) :

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{avec } x = \sum_{j=1}^{n} x_j.e_j)$$

– On note M_{ij} l'élément i,j de M ; pour une matrice colonne u, on note u_i la i-ème composante de u.

Définition 19

Soient E, F deux e.v, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de F. Une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ sera désormais représentée par sa matrice $(a_{ij})_{i=1:n,\ j=1:m}$, où a_{ij} est la i-ième composante de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, soit :

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{où } \forall j = 1:n,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.e'_i$$

Dit autrement, chaque colonne de $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est l'image de e_j par f exprimée dans la base $\mathcal{B}'$. La matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est appelée ***matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.***

Remarque (importante) : La matrice représentative d'une application linéaire **dépend des bases** considérées sur E et F !

Exemple : Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+y, x-y, y) \in \mathbb{R}^3$. La matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\begin{matrix} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) \end{matrix} \end{matrix}$$

3.3 Structure de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Proposition-Définition 20

On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une loi interne $+$ et une loi externe $.$ qui lui confèrent la structure de $\mathbb{K}$-e.v :

$$+ : \begin{array}{c} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (A,B) \mapsto A+B \end{array} \quad \text{où } (A+B)_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

$$. : \begin{array}{c} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) \mapsto \lambda.A \end{array} \quad \text{où } (\lambda.A)_{i,j} := \lambda a_{ij}$$

Démonstration : $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ groupe commutatif :

▶ $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A + B = B + A$ car $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$; pour les mêmes raisons, $(A+B)+C = A+(B+C)$

► neutre : la matrice nulle $0_{m,n}$ est neutre pour $+$

► symétrique : $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe un symétrique $(-A)$ défini par $(-A)_{ij} = -a_{ij}$.

De plus, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la loi . vérifie :

► $\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$ car $(\lambda.(A+B))_{ij} = \lambda(A+B)_{ij} = \lambda(a_{ij}+b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = (\lambda.A)_{ij} + (\lambda.B)_{ij}$

► $(\lambda+\mu).A = \lambda.A + \mu.A$ car $((\lambda+\mu).A)_{ij} = (\lambda+\mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} = (\lambda.A)_{ij} + (\mu.A)_{ij} = (\lambda.A + \mu.A)_{ij}$ ■

Ces lois sur les matrices correspondent aux opérations que l'on peut effectuer sur les applications de $\mathcal{L}(E,F)$. Ainsi, la somme de deux applications f, g de $\mathcal{L}(E,F)$ s'effectue en additionnant leurs matrices respectives : $[f+g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} + [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. De même, la multiplication par un scalaire λ se traduit par une multiplication de la matrice par λ : $[\lambda.f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \lambda.[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Définition 21

(multiplication de matrices) Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice produit de A par B comme suit :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}.$$

La martice résultante est de taille $m \times p$.

Remarque : 1. Ce produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

2. Ce produit n'est en général **pas** commutatif.

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Ici encore, cette loi sur les matrices correspond à une opération sur les applications qu'elles représentent. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 22

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions m, n, p finies, et de bases respectives $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_m)$, $\mathcal{F} = (e'_1, ..., e'_n)$, $\mathcal{G} = (e''_1, ..., e''_p)$. Soient enfin $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. La composition de g par f se traduit par un produit de leurs matrices :

$$[g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}\ [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\ .$$

Démonstration : On note $A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, $B = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$ et $C = [g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}}$. On va montrer que $C = BA$. Par définition de C, on a pour tout $j = 1 : m$,

$$(g \circ f)(e_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij}\ e''_i.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(g\circ f)(e_j) &= g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ e'_k\right) \text{ par définition de } A\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ g(e'_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ \sum_{i=1}^{p} b_{ik}\ e''_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right)\ e''_i,\end{aligned}$$

et, puisque la décomposition sur une base est unique :

$$\forall\ i=1:m,\ j=1:p,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = (BA)_{ij},$$

d'où $C = BA$. ■

L'objet de la proposition qui suit est de montrer que le produit matriciel permet également de traduire l'action d'une application linéaire f sur un élément x (i.e $f(x)$) comme étant le produit entre la matrice représentative de f et la matrice colonne des coordonnées de x.

Proposition 23

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions m, n finies, et de base respective $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_m)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, pour tout $x \in E$, les composantes de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'expriment :

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\ \ [x]_{\mathcal{B}}$$

Démonstration : On note $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $X = [x]_{\mathcal{B}}$, $Y = [f(x)]_{\mathcal{B}'}$. Pour tout $x \in E$, on a par définition de Y :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\ e'_i.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\ e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j\ f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ e'_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)\ e'_i = \sum_{i=1}^{n}(AX)_i\ e'_i\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall\ i=1:n,\ y_i = (AX)_i.$$

Ainsi, $Y = AX$. ■

On peut constater que cette représentation matricielle permet de visualiser le caractère linéaire de la fonction f, qui s'écrit comme le produit (matriciel) entre une constante (matricielle) A et la "variable" x, généralisant ainsi la représentation classique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto ax$.

3.4 Propriétés et opérations sur les matrices

Proposition-Définition 24 (*rang*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de** *A le rang de la famille constituée des colonnes de A, qui est aussi égal au rang des lignes de A.*

Notons que les notions de noyau et d'image sont les mêmes que pour les applications linéaires :

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \{X \in \mathbb{K}^n \ / \ AX = 0_{\mathbb{K}^m}\} \\ \mathrm{Im}(A) &= \{AX, \ X \in \mathbb{K}^n\}. \end{aligned}$$

En particulier, le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire quelle représente :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f).$$

Exemple : Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{rg}(A) = 2$. En effet, en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on a $\mathrm{rg}(A) = rg((C_1, C_2, C_3))$. Or (C_1, C_2, C_3) est liée car $C_3 = C_1 - C_2$, donc $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. En revanche, (C_1, C_2) est libre, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$, et la matrice (ou l'application qu'elle représente) n'est pas surjective. De plus, le théorème du rang indique que $\dim(\ker(A)) = 3 - 2 = 1$, l'application n'est donc pas injective car $\ker(A) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Cherchons une base de $\ker(A)$.

$$X = (x, y, z) \in \ker(A) \iff AX = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y + 2\,z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases}$$

Donc $X = (x, -x, -x) = x\,(1, -1, -1)$. Une base de $\ker(A)$ est $(1, -1, -1)$.

Définition 25 (*transposée*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle ***matrice transposée de*** *A la matrice notée $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (parfois notée ${}^tA$) définie par :*

$$\forall i = 1 : n, \ \forall j = 1 : m, \ \left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Si $A = A^T$, on dit que A est ***symétrique***.

Dit autrement : les lignes de A^T sont constituées des colonnes de A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *On dit que A est* ***inversible*** *s'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$AA' = A'A = I_n.$$

Si A est inversible, on note A^{-1} son inverse.

– *On appelle* **trace de** A *le scalaire :*

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \textit{(somme des éléments diagonaux)}$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{tr}(A) = 0 + 2 = 2$. De plus, A est inversible. En effet, soit $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$. Alors :

$$AA' = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a'_{21} = 1 \\ a'_{22} = 0 \\ a'_{11} + 2a'_{21} = 0 \\ a'_{12} + 2a'_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On a bien } A'A = I_2.$$

On donne dans la proposition qui suit quelques propriétés utiles lors des calculs.

Proposition 27

1. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \left(A^T\right)^T = A$
2. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (AB)^T = B^T A^T$
3. $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
4. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall\ B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),\ tr(AB) = tr(BA)$
5. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible, on a* A^T *inversible et* $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
6. *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversibles, on a* AB *inversible et* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration : 1. évident

2. $\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk}\ b_{ki} = \sum_k b_{ki}\ a_{jk} = \left(B^T A^T\right)_{ij}$
3. évident
4. $\mathrm{tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij}\ b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji}\ a_{ij} = \sum_j (BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA)$
5. Il est évident que A' est inversible. De plus, $A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T$ d'après 2, d'où $A^T \left(A^{-1}\right)^T = I_n$, de même pour $\left(A^{-1}\right)^T A^T$.
6. $AB\,(AB)^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$, de même pour $(AB)^{-1}\,AB$, d'où le résultat. ■

Définition 28 (*déterminant*)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. *On définit le déterminant de la matrice* A, *noté* $|A|$, *par :*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, *on définit alors :*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Enfin, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit le determinant développé selon la ligne i :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \;\; |M_{ij}|$$

où M_{ij} est la matrice A à laquelle on a "enlevé" la ligne i et la colonne j.

Remarque importante : Cette formule est valable quelle que soit la ligne de développement i choisie. De plus, le développement du déterminant peut se faire, de la même manière, selon une colonne j en inversant les rôles de i et j, le résultat étant évidemment le même.

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \; 5 \; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -15$ (on a décidé de développer par rapport à la seconde ligne par simplicité).

3.5 Matrices de changement de base

Comme on l'a vu, l'écriture des vecteurs et matrices dépendent des bases dans lesquelles ils sont exprimés. En pratique, on est souvent amené à se placer dans des bases non canoniques pour simplifier certains problèmes. Les matrices de passage permettent de ramener ces opérations de changement de base à une multiplication matricielle.

Proposition-Définition 29

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un e.v E. On appelle ***matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*** *la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$:*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left[e'_1 | ... | e'_n\right]_{\mathcal{B}}.$$

Ainsi, pour exprimer dans la base $\mathcal{B}$ un vecteur $x \in E$ exprimé en base $\mathcal{B}'$, il suffit d'effectuer le produit :

$$[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \;\; [x]_{\mathcal{B}'}$$

On a de plus la propriété :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}.$$

De même, pour les applications linéaires, on peut envisager d'effectuer un changement de base sur E et/ou F.

Proposition 30

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{E}$,$\mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$,$\mathcal{F}'$ deux bases de F. On note $A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, $A' = [f]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{F}'}$, P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$. On a alors la relation suivante :

$$A' = Q^{-1}AP. \tag{2}$$

Remarques : 1. En d'autres termes : la matrice représentative de f dans les nouvelles bases $\mathcal{E}'$,$\mathcal{F}'$ s'obtient en pré et post multipliant la matrice de f dans les anciennes bases par des matrices de passage. Bien entendu, la relation (2) peut-être écrite de diverses manières ; l'essentiel est d'en retenir une

et de s'y tenir, notamment concernant l'expression des matrices de changement de base en jeu qui sont souvent source d'erreur et de confusion.

2. Ce genre d'opération est très utilisé pour la réduction d'endomorphismes (diagonalisation et triangularisation de matrices, etc.).

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (endomorphisme) et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, avec $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$.

Soient deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de E. On note $\mathcal{B}$= (u_1, u_2) une nouvelle base de E. Exprimons la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}$. Calculons la matrice de passage :

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ u_1 \quad u_2 \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}.$$

On doit maintenant calculer son inverse. Pour cela, on exprime la relation entre les vecteurs u_1, u_2 et la base canonique e_1, e_2 :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 \\ u_2 = -e_1 + e_2, \end{cases}$$

et on inverse cette relation en resolvant le système pour exprimer e_1, e_2 en fonction de u_1, u_2 :

$$\begin{cases} e_1 = u_1 - e_2 \\ e_2 = u_2 + e_1 = u_2 + u_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \\ e_2 = \frac{1}{2}(u_2 + u_1). \end{cases}$$

Ainsi :

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}^{-1} = \begin{array}{c} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ e_1 \quad e_2 \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}, \text{ et } [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}^{-1}\, [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\, P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut constater que ce changement de base a "transformé" la matrice en une matrice dite triangulaire (qui n'a que des 0 en dessous de la diagonale). Cette opération est un cas particulier de réduction d'endomorphisme.

4 Réduction d'endomorphismes

Rappel : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une application linéaire de E dans E. La matrice représentative d'un endomorphisme est donc une matrice carrée de taille n.

Dans cette section on s'intéressera principalement à introduire les notions clés à la **diagonalisation d'endomorphismes**, c'est-à-dire à la diagonalisation de leur matrice représentative (lorsque cela est possible) par changement de bases. D'autres réductions moins exigeantes existent mais ne sont pas présentées ici car plus techniques ; cependant, elles sont basées sur les même notions, et le lecteur désireux d'en apprendre plus pourra se référer à n'importe quel ouvrage d'algèbre linéaire pour en savoir plus.

4.1 Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres

La notion de valeur propre (ou vecteur propre, ou direction propre) est essentielle, on la rencontre dans toutes les disciplines scientifiques sous une forme ou une autre. Bien qu'appliquée aux matrices ici, la terminologie s'applique bien entendu de la même manière aux endomorphismes que ces matrices représentent.

Définition 31

On appelle ***valeur propre - vecteur propre*** *tout couple* $(\lambda, x) \in \mathbb{K}\times E \setminus \{0_E\}$ *tel que :*

$$A\,x = \lambda\,x.$$

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est appelé ***spectre*** *de la matrice et est noté* $Sp(A)$.

Remarque : Selon la nature du vecteur propre (vecteur de $\mathbb{R}^n$, fonction etc.), on pourra parler de direction propre ou encore fonction propre.

Soit λ une valeur propre de A ; si x est un vecteur propre associé à λ, il est solution de :

$$A\,x = \lambda\,x \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\,x = 0_E \Leftrightarrow x \in \ker(A - \lambda I_n).$$

Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre revient donc à déterminer $\ker(A - \lambda I_n)$ (c'est-à-dire en déterminer une base).

Définition 32

On appelle ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre* λ *le s.e.v noté* E_λ *:*

$$E_\lambda := \ker(A - \lambda I_n).$$

Ces notions sont à la base du processus de diagonalisation (ou autre réduction en général) d'une matrice.

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sachant que 1 est valeur propre de cette matrice, déterminons le sous-espace propre E_1 :

$$\begin{aligned} v \quad \in \quad & E_1 \Leftrightarrow A\,v = 1.v \Leftrightarrow (A - 1I_n)\,v = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 0 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = -v_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $v \in E_1 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc déterminé une base de E_1, à savoir le vecteur $(1, -1)$, E_1 est de dimension 1. On pourrait en faire de même avec la valeur propre 2 et determiner E_2 (on trouve $(0, 1)$ comme vecteur de base).

4.2 Diagonalisation de matrices

La diagonalisation d'une matrice consiste à déterminer un changement de base telle que la matrice soit diagonale dans cette base. Lorsqu'elle est possible, cette opération est intéressante car elle simplifie considérablement les calculs faisant intervenir la matrice en question. Si cela n'est pas possible, d'autres réduction existent (triangularisation, réduction de Jordan etc.).

Les grandes étapes d'un processus de diagonalisation sont :

1. **Détermination des valeurs propres de la matrice**
   La plupart du temps, on utilise le théorème 33.

2. **Détermination des sous-espaces propres associés à chaque valeur propre**
   Pour chaque valeur propre λ, on détermine une base du sous-espace E_λ en posant $(A-\lambda I_n)\,x = 0_E$.
3. **La matrice est-elle diagonalisable ?**
   On utilise alors le théorème 34 pour savoir si la matrice est diagonalisable ou pas.
4. **Diagonalisation de A.**
   Si A est diagonalisable, alors on sait que la matrice est diagonale lorsqu'elle est exprimée dans la base constituée de ses vecteurs propres, ou, plus précisemment, constituée des vecteurs de base des différents sous-espaces propres E_{λ_i} (on peut montrer qu'ils forment une base de E). On note $v_1, ..., v_n$ ces vecteurs de base, P la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres $P = [v_1|...|v_n]$, et D =diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Alors, on a :

$$D = P^{-1}AP, \text{ ou encore } A = PDP^{-1}.$$

   Ainsi, l'application linéaire représentée par A dans la base canonique est représentée par une matrice diagonale dans la base des vecteurs propres. En pratique comme en théorie, la notion de diagonalisation de matrice (et de manière générale de réduction d'endomorphisme) est très importante, car elle permet de transformer un problème faisant intervenir la matrice A en un problème simplifié équivalent faisant intervenir la matrice diagonale D, en utilisant la relation ci-dessus. Du fait de sa structure intéressante, on pourra résoudre des problèmes de manière plus aisée, et "repasser" à la solution du problème original en utilisant la matrice P.

Voici les théorèmes fondamentaux utilisés dans les précédents points.

Théorème-Définition 33

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A, noté p_A, le polynôme défini par :*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

On a alors le résultat fondamental suivant : les valeurs propres de la matrice A sont données par les racines du polynôme caractéristique (c'est-à-dire qu'elles sont solution de $p_A(\lambda) = 0$).

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dans un précédent exemple, il a été affirmé que 1 et 2 sont valeurs propres. On va ici le montrer en calculant son polynôme caratéristique :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de A étant les racines de p_A, on en déduit immédiatement que celles-ci sont 1 et 2.

Théorème 34

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si :

1. *Son polynôme caractéristique est sous la forme : $p_A(\lambda) = K \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, c'est-à-dire qu'il est le produit de polynômes de degré un élevés à une puissance entière m_i (on dit qu'il est **scindé**).*
2. *La **multiplicité** m_i de la valeur propre λ_i est égale à la dimension du sous-espace propre*

associé E_{λ_i}.

En particulier, si $p_A(\lambda)$ n'admet que des racines simples, la matrice est diagonalisable.

Exemple : $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+5)$ est scindé ; $p_A(\lambda) = (\lambda^2+3\lambda-1)(\lambda+5)$ n'est pas scindé **dans** $\mathbb{R}$ (mais il l'est dans $\mathbb{C}$!) : on voit ici l'importance de ne pas perdre de vue le corp $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille.

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On déroule les différentes étapes :

1. Déjà fait lors d'un précédent exemple : les valeurs propres sont 1 et 2. Ces valeurs propres sont de mutiplicité 1 (car $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^1(2-\lambda)^1$).
2. Les sous-espaces E_1 et E_2 ont été determinés dans un exemple précédent : $E_1 = \text{Vect}((1,-1))$ et $E_2 = \text{Vect}((0,1))$.
3. La dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres (égales à 1), le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, donc la matrice A est diagonalisable.
4. La matrice de passage s'exprime $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Ce qu'il faut impérativement savoir à l'issue de ce cours

- Savoir refaire les exemples du cours ! Ils représentent le minimum syndical de ce qu'il faut savoir faire.
- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel
  - avec les axiomes d'un e.v
  - en montrant que c'est un s.e.v
  - en montrant que c'est le noyau ou l'image d'une application linéaire
- Montrer qu'une famille de vecteur est libre et/ou génératrice.
  - libre : poser $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i = 0_E$ et montrer que ça implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1 : p$.
  - génératrice : montrer que tout $x \in E$ s'écrit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i$ –> résoudre et trouver des λ_i
- Montrer qu'une famille est une base
  - libre et génératrice
  - libre (ou génératrice) et possédant un nombre d'éléments égal à la dimension de l'e.v.
- Application linéaire, endomorphisme, et savoir établir leur injectivité/surjectivité/bijectivité.
  - proposition 16
  - savoir déterminer une base de $\ker(f)$ (ou d'une matrice) est in-dis-pen-sable. Poser $f(x) = 0$ (ou $AX = 0$ pour les matrices) et déterminer les x qui vérifient cette relation (soit 0_E, soit une infinitée engendrée par des vecteurs de base à déterminer)
  - savoir jongler avec un système 3 équations - 3 inconnues !
  - connaitre le théorème du rang et ses applications.
- Effectuer les opérations de bases sur les matrices : somme, produit, multiplication par un scalaire, transposée.
- Calculer l'inverse d'une matrice en inversant un système d'équations (relations entre les vecteurs de base)
- Calculer le déterminant d'une matrice de taille 2 ou 3
- Calculer la matrice représentative d'une application linéaire relativement à deux bases dont l'une (et *a fortiori* les deux) est canonique
- Calculer une matrice de changement de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ lorsque l'une des bases est canonique
  - Si la base canonique est $\mathcal{B}$, le calcul est immédiat
  - Si la base canonique est $\mathcal{B}'$, on peut établir $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ (immédiat) et calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right)^{-1}$ en inversant le système d'équations.
- Effectuer un changement de base d'un vecteur ou d'une matrice via les matrices de passage
- Connaitre toute la partie 4, qui est minimaliste, notamment les étapes à suivre et les résultats utilisés pour la diagonalisation de matrice.
  - Calculer les valeurs propres d'une matrice en calculant son polynôme caractéristique
  - déterminer une base de tous les sous-espaces propres associés (d'où la nécessité de savoir donner une base du noyau d'une application !)
  - Savoir dire si une matrice est diagonalisable, et si oui savoir donner sa matrice de passage (matrice des vecteurs propres), ainsi que son inverse
  - Connaître la relation entre les matrices de passage, la matrice diagonale et la matrice initiale.

Index

A

Antécédent . . . 7
Applications linéaires . . . 7

B

Base . . . 6
Bijectivité . . . 7

C

Combinaison linéaire . . . 4
Coordonnées . . . 6

D

Diagonalisation de matrice . . . 17
Dimension . . . 6
Déterminant . . . 14

E

Endomorphisme . . . 7
Espace vectoriel . . . 3

F

Famille libre . . . 5

I

Image . . . 7
Injectivité . . . 7

M

Matrice de passage . . . 15
Matrice inversible . . . 13
Matrice représentative . . . 10
Matrice symétrique . . . 13
Matrices . . . 9

P

Polynôme caractéristique . . . 18

R

Rang (d'une application linéaire) . . . 8
Rang (d'une matrice) . . . 12

S

Sous-espace propre . . . 17
Sous-espace vectoriel . . . 4
Spectre . . . 17
Surjectivité . . . 7

T

Théorème du rang . . . 8
Transposée . . . 13

V

Valeur propre . . . 17
Vecteur . . . 3
Vecteur propre . . . 17

Espaces vectoriels, familles, bases

Exercice 1 Soit $E_1 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f'' + f = 0\}$.

Montrer que E_1 muni des lois + et . usuelles sur les fonctions est un espace vectoriel.

Exercice 2 Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$.

1. Cette famille est-elle libre ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$? On note $\mathcal{B}$ cette base.
2. Soit le vecteur u dont l'expression dans la base canonique par $(2, 2, 2)$. Donner son expression (i.e. sa décomposition) dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = x \text{ et } x + y + z = 0\}$. Pour chacun de ces ensembles :

1. Montrer que c'est un espace vectoriel.
2. En donner une base et sa dimension.

Applications linéaires et matrices

Exercice 4 Soit une application f définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + t, x + y + z).$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer $\ker(f)$, en donner une base et sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, en donner une base et sa dimension.
4. f est-elle un isomorphisme ? Si non, est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, R^3)$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F}$ celle de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Donner l'expression de $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

   (b) Calculer $f(1,1,2,-1)$ de deux manières différentes (avec f et avec $[f]$).

2. Soit une famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (0,1,1,1),\ u_3 = (0,0,1,1),\ u_4 = (0,0,0,1).$$

   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Calculer $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ (plusieurs moyens possibles)

   (c) Soit le vecteur v exprimé en base $\mathcal{B}$ par $[v]_{\mathcal{B}} = (1,0,1,-1)$. Calculer $f(v)$. (toujours dans la base canonique $\mathcal{F}$)

Réduction d'endomorphismes

Exercice 6 On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{E}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$f(x,y,z) \mapsto (11x - 5y + 5z, -5x + 3y - 3z, 5x - 3y + 3z).$$

1. (a) Ecrire la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{E}$. On notera A cette matrice.

   (b) Determiner $\ker(A)$. L'application f est-elle injective ?

   (c) f est-elle surjective ?

2. On se propose de diagonaliser, si possible, la matrice A, c'est-à-dire de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f soit diagonale.

   (a) Calculer les valeurs propres de la matrice A.

   (b) Exprimer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres (en donner une base à chaque fois). (on pourra utiliser la question 1b)

   (c) Donner une base diagonalisante de A, ainsi que les matrices en jeu dans cette diagonalisation.

Remarque importante : lorsqu'on écrit $x, y \in E$, cela signifie que x et y sont deux éléments de l'espace vectoriel E. Il s'agit d'une notation générique, en aucun cas cela signifie que x et y représentent des composantes d'un vecteur. Si $E = \mathbb{R}^n$, alors x et y seront tous deux des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, possédant chacun n composantes que l'on pourra noter $x_1, ..., x_n$ et $y_1, ..., y_n$. Les sources de confusion sont nombreuses : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on note souvent (x, y) les **coordonnées** d'un vecteur. De plus, $x_1, ..., x_n$ peut dans certains cas désigner un ensemble de n vecteurs de E et non pas les coordonnées d'un vecteur ! Il est donc impératif de bien garder en tête les objets que l'on manipule et les notations que l'on a décidé de leur attribuer.

Espaces vectoriels, familles, bases

Exercice 1 Méthode 1 : avec la définition d'un e.v (trivial car tout se remène à la structure d'e.v. que possède $\mathbb{R}$). Les lois $+$ et $.$ sur les espaces de fonctions ont été définies lors du premier cours.

- CANS :
  - $\forall f, g \in E_1$, $f + g = g + f$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$.
  - $\forall f, g, h \in E_1$, $(f + g) + h = f + (g + h)$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$.
  - Il existe un élément neutre noté 0_{E_1} (que l'on définit par $\forall x \in \mathbb{R}$, $0_{E_1}(x) := 0$), appartenant à E_1 car appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifiant $f'' + f = 0$; il est bien tel que $\forall f \in E_1$, $0_{E_1} + f = f$.
  - $\forall f \in E_1$, il existe un élément de E_1 noté $(-f)$ que l'on définit par $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-f)(x) := -f(x)$ et qui est donc tel que $f + (-f) = 0_{E_1}$. L'élement noté $(-f)$ appartient évidemment à E_1 puisque f appartient à E_1 (il est donc $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie l'eq. différentielle).
- La loi externe $.$ vérifie :
  - $\forall f \in E_1$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda + \mu).f = \lambda.f + \mu.f$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $((\lambda + \mu).f)(x) = (\lambda+\mu) f(x)$ par définition de $.$, et donc $((\lambda + \mu).f)(x) = \lambda f(x)+\mu f(x) = (\lambda.f)(x)+(\mu.f)(x)$
  - même démarche pour $\lambda.(f + g) = \lambda.f + \lambda.g$, $(\lambda\mu).f = \lambda.(\mu.f)$ et $(1_{\mathbb{R}}.f) = f$.

On a ainsi démontré tous les axiomes d'un espace vectoriel.

Méthode 2 : utiliser la notion de sous-espace vectoriel. On suppose évidemment acquis le fait que l'espace $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Il reste à vérifier les axiomes de s.e.v : $E_1 \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et il est non vide car $0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_1$ (car $0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ vérifie évidemment $f'' + f = 0$). On montre alors la stabilité de E_1 par combinaison linéaire : $\forall f, g \in E_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

- $\lambda.f + g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- Car l'opération de dérivation est linéraire, on a $(\lambda.f+g)''+(\lambda.f+g) = \lambda.f''+g''+(\lambda.f+g) = \lambda.(f'' + f) + g'' + g = \lambda.0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} + 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Ainsi, E_1 est un s.e.v de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; c'est donc un e.v.

Méthode 3 : On montre que E_1 est le noyau d'une application linéaire. En effet, $E_1 = \ker(\varphi)$ avec $\varphi : f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f'' + f$, qui est bien une application linéaire car $\varphi(\lambda.f+g) = \lambda.\varphi(f)+\varphi(g)$ d'après le dernier point de la méthode 2. Ainsi, E_1 est un s.e.v de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2

1. – Cette famille (notée v_1, v_2, v_3) est-elle libre ? Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0\\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_2 = -\lambda_3\\ -\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0.\end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

   Elle est donc libre.

   – Est-ce une base ? Methode 1 : c'est une famille libre maximale (i.e : 3 vecteurs dans un espace de dimension 3), c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ (elle est nécessairement génératrice).
   Methode 2 : on montre que la famille est génératrice, c'est-à-dire qu'il nous faut montrer que tout élément $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3, c'est-à-dire montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, soit :

$$\left\{\begin{array}{l}x = \lambda_1 + 2\lambda_3\\ y = \lambda_2 + \lambda_3\\ z = \lambda_2 + 2\lambda_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_2 = y - \lambda_3\\ z = y + \lambda_3\\ x = \lambda_1 + 2\lambda_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_3 = z - y\\ \lambda_2 = 2y - z\\ \lambda_1 = x - 2z + 2y.\end{array}\right.$$

   On a bien montré que la famille est génératrice ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

   Remarque : Dans ce dernier calcul, on a en fait montré que pour tout u de $\mathbb{R}^3$, il existe **un unique** triplet $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, ce qui prouve directement que la famille est une **base** !

2. On utilise la question précédente pour calculer les coefficients de la décomposition du vecteur $(2, 2, 2)$ dans la base v_1, v_2, v_3 :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_3 = z - y = 2 - 2 = 0\\ \lambda_2 = 2y - z = 4 - 2 = 2\\ \lambda_1 = x - 2z + 2y = 2 - 4 + 4 = 2.\end{array}\right.$$

   Le vecteur $(2, 2, 2)$ est égal à $2v_1 + 2v_2 + 0v_3$ et s'écrit dans la base : $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}_{(v_1,v_2,v_3)}$.

Exercice 3

– $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\right\}$ et

1. On a $F = \ker(\varphi)$ où $\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x+t\ ,\ x+y+z)$ est une application linéaire, donc F est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$.

2. $u=(x,y,z,t)\in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ y=t-z \end{array}\right.$, donc

$$u=\begin{pmatrix} -t \\ t-z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2},$$

donc $u \in \text{Vect}(v_1,v_2)$ (cad v_1, v_2 engendre F). La famille est-elle libre ? Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Alors, $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ (évident). La famille est donc libre et génératrice : c'est une base de F, qui est de dimension 2 (deux vecteurs de base).

– $G = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ y=x \text{ et } x+y+z=0\right\}$.

1. On a $G=\ker(\psi)$ où $\psi : (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mapsto (y-x \ , \ x+y+z)$ est une application linéaire, donc G est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. $u=(x,y,z)\in G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ z=-2x \end{array}\right.$, donc

$$u=\begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_1},$$

donc $u \in \text{Vect}(v_1)$ (cad v_1 engendre G). La famille est-elle libre ? Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $\lambda_1 = 0$ (évident). La famille est donc libre et génératrice : c'est une base de G, qui est de dimension 1 (un vecteur de base).

Applications linéaires et matrices

Exercice 4 Soit f définie par :

$$f(x,y,z,t)=(x+t, x+y+z).$$

1. Soient $u=(x_1,y_1,z_1,t_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2,t_2)$ des éléments de $\mathbb{R}^4$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que

$$f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v).$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u+v) & = & \begin{pmatrix} \lambda x_1+x_2+\lambda t_1+t_2 \\ \lambda x_1+x_2+\lambda y_1+y_2+\lambda z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1+t_1)+(x_2+t_2) \\ \lambda(x_1+y_1+z_1)+x_2+y_2+z_2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda(x_1+t_1) \\ \lambda(x_1+y_1+z_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_2+t_2) \\ x_2+y_2+z_2 \end{pmatrix} = \lambda f(u)+f(v). \end{array}$$

2. $\ker(f)=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ f(x,y,z,t)=(0,0)\right\} = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+t=0 \text{ et } x+y+z=0\right\} = F$. Une base $v_{1,}v_2$ de F a été donnée dans l'exercice précédent.

3. Méthode 1 : $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 2$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. On peut prendre comme base la base canonique.

   Méthode 2 : On note e_i la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On sait que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\text{liés}}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   Or ces 3 vecteurs sont liés car $(1,1) = (0,1) + (1,0)$, donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \mathbb{R}^2 \text{ (car deux vecteurs libre dans } \mathbb{R}^2 \text{ engendrent } \mathbb{R}^2\text{)}.$$

   Méthode 3 : $v = (v_1, v_2) \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si il existe un élement $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $v = f(u)$.

$$v \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = v_1 \\ x + y + z = v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v_1 - t \\ y = v_2 - v_1 + t - z. \end{cases}$$

   Ainsi, $\forall v \in \mathrm{Im}(f)$, on a exprimé $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $v = f(u)$ (une infinité en fait) sans aucune contrainte sur v, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

4. Non : f est surjective ($\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$) mais pas injective (car $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$), elle n'est donc pas bijective.

Exercice 5

1. (a) $$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{matrix} \end{array}.$$

   (b) Méthode 1 :avec l'expression de f : $f(1,1,2,-1) = (2,-2,6)$

   Methode 2 : en utilisant $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$: $f(1,1,2,-1) = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$.

   (a) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0. \end{cases}.$$

   La famille est donc libre et maximale (4 éléments dans $\mathbb{R}^4$), c'est une base.

(b) Méthode 1 : calcul direct

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f(u_1) \quad f(u_2) \quad f(u_3) \quad f(u_4) \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Méthode 2 : Calculons la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

"transforme" un vecteur exprimé en base $\mathcal{B}$ en un vecteur en base $\mathcal{E}$.

Alors :

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \; P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $[f(v)]_{\mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \; [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Remarque : On peut également le voir différemment et noter que $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \; [v]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \; P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} \; [v]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \; [v]_{\mathcal{E}}$; on constate alors que ce vecteur v exprimé $(1,0,1,-3)$ en base $\mathcal{B}$ n'est autre que le vecteur $(1,1,2,-1)$ (en base canonique) de la question 1b car $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} \; [v]_{\mathcal{B}} = (1,1,2,-1)$.

Réduction d'endomorphismes

Exercice 6 On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{E}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$f(x,y,z) \mapsto (11x - 5y + 5z, -5x + 3y - 3z, 5x - 3y + 3z).$$

1. (a) $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3) \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$

(b) $\ker(A) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;/\; AX = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$. Soit $X = (x,y,z)$ un élément de $\ker(A)$. Alors :

$$AX = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{5}x + z \\ -5x + \frac{33}{5}x + 3z - 3z = 0 \\ 5x - \frac{33}{5}x - 3z + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{5}x + z \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}.$$

Ainsi, $X \in \ker(A) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=v_1,\ \text{base de } \ker(A)}$. Le noyau de A est donc différent de $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et par suite f est non injective.

(c) Non car $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$ par le théorème du rang, donc $\mathrm{Im}(A) \neq \mathbb{R}^3$. Un autre moyen est de noter que les lignes de la matrices A sont liées (car les deuxième et troisième lignes sont opposées), donc $rg(A) \leqslant 2$.

2. On se propose de diagonaliser, si possible, la matrice A, c'est-à-dire de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f soit diagonale.

(a) Les valeurs propres de A sont les racines du polynome caractéristique p_A :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (11-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -5 & 3-\lambda \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (11-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 9\right) + 5\left(-5(3-\lambda) + 15\right) + 5\left(15 - 5(3-\lambda)\right) \\ &= (11-\lambda)\left(-\lambda\right)(6-\lambda) + 25\lambda + 25\lambda = \lambda(50 - (6-\lambda)(11-\lambda)) \\ &= \lambda(-\lambda^2 + 17\lambda - 16) = \lambda(\lambda-1)(16-\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont 0, 1 et 16.

(b) On a 3 sous-espaces propres à déterminer :

$$\begin{aligned} E_0 &= \ker(A - 0I_3) = \ker(A) \text{ –> cf question 1b, base } v_1 \\ E_1 &= \ker(A - I_3) \\ E_{16} &= \ker(A - 16\, I_3). \end{aligned}$$

– Détermination de E_1 :

$$\begin{aligned} X &= (x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 5y + 5z = x \\ -5x + 3y - 3z = y \\ 5x - 3y + 3z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ -5x + 4x + 2z - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ x = -z \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ 0 = 0 \text{ –> inutile} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=v_2,\ \text{base de } E_1}. \end{aligned}$$

– Détermination de E_{16} :

$$\begin{aligned} X &= (x,y,z) \in E_{16} \Leftrightarrow (A - 16\,I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = 16X \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11x - 5y + 5z = 16x \\ -5x + 3y - 3z = 16y \\ 5x - 3y + 3z = 16z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y - z \\ -5x + 5y - 16y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - 13z = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y - z \\ y = -z \\ 5x - 3y - 13z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2z \\ y = -z \\ 0 = 0 \text{ -> inutile} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:= v_3,\ \text{base de } E_{16}} . \end{aligned}$$

(c) La matrice A est diagonalisable. En effet, le p_A est scindé dans $\mathbb{R}$, et la multiplicité des valeurs propres (1 car ce sont des racines simples) est égale à la dimension de chaque sous espace propre E_i associé (égale à 1 pour tous les sous-espaces propres puisqu'ils ont un seul vecteur de base).

La base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise A. On calcule alors les matrices de passage en jeu dans cette dingonalisation :

$$P = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = (\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,)_{\mathcal{E}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} .$$

Pour calculer la matrice inverse P^{-1}, il faut inverser le système reliant les vecteur v_i et les vecteurs e_i. On a :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} v_1 = 0e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = -e_1 - e_2 + e_3 \\ v_3 = 2e_1 - e_2 + e_3 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_2 = v_1 - e_3 \\ e_1 = -v_2 - (v_1 - e_3) + e_3 = 2e_3 - v_1 - v_2 \\ v_3 = 4e_3 - 2v_1 - 2v_2 - v_1 + 2e_3 = 6e_3 - 3v_1 - 2v_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_3 = \frac{1}{6}\,(3v_1 + 2v_2 + v_3) \\ e_2 = -\frac{1}{6}\,(-3v_1 + 2v_2 + v_3) \\ e_1 = -\frac{2}{6}v_2 + \frac{2}{6}v_3 \end{array} \right. , \end{aligned}$$

d'où :

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = (\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3 \,)_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ e_1 \quad e_2 \quad e_3 \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} .$$

On a alors la relation entre la matrice diangonale des valeurs propre et A suivante :

$$\underbrace{D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}}_{\text{matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}} = P^{-1}AP.$$

En pratique comme en théorie, la notion de diagonalisation de matrice (et de manière générale de réduction d'endomorphisme) est très importante, car elle permet de transformer un problème faisant intervenir la matrice A en un problème simplifié équivalent faisant intervenir la matrice diagonale D, en utilisant la relation ci-dessus. Pour ne citer qu'eux : calcul matriciel en tout genre, résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires etc.

- L'objet de cette feuille d'exercices supplémentaires (volontairement calculatoire et répétitive) est de vous faire acquérir certains automatismes.
- Faire des exercices sans connaître le cours (au moins l'essentiel) est une perte de temps ! **Tout** ce qui est nécessaire à la résolution de ces exercices y figure. De plus, les exercices du cours sont les plus simples que vous rencontrerez, il faut absolument savoir les faire.
- Refaire les TD, en prenant soin de parcourir les différentes méthodes possibles : comme indiqué dans la correction, il est très fréquent que plusieurs moyens (plus ou moins judicieux) mènent au résultat, tous les utiliser est un bon entraînement. Ces différentes méthodes s'appliquent également aux exercices de cette feuille, les questions peuvent souvent être refaites de différentes manières.
- Pour finir, l'algèbre linéaire est une matière qui se prête bien à l'auto-entraînement. Il est très facile de construire sois-même des exercices et de vérifier si on a juste : "ai-je bien $f(x) = 0$?" pour un calcul de noyau, "ai-je bien $P^{-1}AP = D$?" pour une diagonalisation etc. Par exemple, prendre une application linéaire au hasard, en déterminer le noyau, l'image, la matrice représentative, dont on pourra se demander si elle est diagonalisable, et si oui le faire, peut constituer un passe-temps de choix pour occuper vos longues journées de vacances.

Espaces vectoriels, familles, bases

Exercice 1 Pour chacune de ces familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elles sont libres, si elles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$, donner la dimension de l'espace qu'elles engendrent et dire si elles forment une base de $\mathbb{R}^3$ (on pourra bien sûr répondre à ces questions dans l'ordre que l'on voudra). Nota : même si des raccourcis sont possibles pour répondre à certaines questions, on pourra (pour s'entrainer) tout démontrer par le calcul.

1. $(-1,0,0)$,$(1,1,1)$, $(1,2,3)$
2. $(0,1,2)$,$(1,1,1)$, $(1,2,3)$
3. $(1,2,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,3,-1)$
4. $(-1,1,2)$,$(2,0,0)$, $(0,1,1)$
5. $(-1,2,0)$,$(2,4,0)$, $(3,6,0)$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel, et (u,v,w) une famille libre (resp. génératrice) d'éléments de E. Montrer que les vecteurs a,b,c définis par :

$$\begin{cases} a = v + w \\ b = u + w \\ c = u + v + w \end{cases}$$

forment également une famille libre (resp. génératrice) de E.

Exercice 3 Soient les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0,\ x = z\right\}, \\ G &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z = x + y,\ x + y + t = 0\right\}. \end{aligned}$$

1. Pour ces deux ensembles :
   (a) Montrer que c'est un espace vectoriel.
   (b) En donner une base et sa dimension. (représenter F sur un graphe en 3D pourra permettre de confirmer les résultats obtenus par le calcul)
2. Soit le vecteur $(1, 0, 1, -1)$. Montrer qu'il appartient à G, et en donner sa décomposition sur la base de G précédemment calculée.

Applications linéaires et matrices

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ (le montrer ?) définie par

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x + y + t \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F}$ celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (en donner une base et leur dimension)
2. f est-elle injective ? Surjective ? Est-ce un isomorphisme ?
3. Donner l'expression de $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
4. Soit une famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$u_1 = (1,1,0,1),\ u_2 = (0,0,1,0),\ u_3 = (2,-1,0,1),\ u_4 = (1,3,0,1).$$

   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Calculer $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$

Exercice 5 Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$f_1 = (1,0,0),\ f_2 = (1,1,0),\ f_3 = (1,1,1).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$, puis Q la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{E}$. On vérifiera que $P^{-1} = Q$.

3. Soit $v = (1, 3, -2)$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.
4. Soit $w = -f_1 + 2f_2 + 3f_3$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$.
5. Soit l'application linéaire

$$h(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 3x_3 - x_1, x_2 - x_1).$$

   (a) Donner l'expression de $[h]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$, sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) En déduire $[h]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}$, sa matrice représentative dans la base $\mathcal{F}$. (on pourra également, à titre d'entrainement et/ou pour vérification, calculer cette dernière en utilisant la définition).

Réduction d'endomorphismes

Exercice 6 Pour chacune de ces matrices, établir si elles sont diagonalisable ou pas, et si oui les diagonaliser (i.e : écrire la matrice de passage P et la matrice diagonale correspondante).

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (exponentielle de matrice) On rappelle que, si x est un nombre, on a :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Il peut arriver qu'on soit amené à devoir calculer la quantité

$$\mathrm{e}^M := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + ...$$

où A est une matrice carrée. La notion d'exponentielle de matrice est abondamment utilisée, entre autres pour la résolution de systèmes d'équations différentielles. Si M est une matrice diagonalisable, on va voir que le calcul de son exponentielle est très simple.

1. Soit D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Calculer D^2, D^3 puis D^4.

2. En déduire l'expression générale de D^n pour tout n, et montrer finalement que

$$\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix}.$$

3. Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme vu dans l'exercice précédent, la matrice A est diagonalisable. En utilisant la relation liant A, D (la matrice diagonale) et P (la matrice de passage), montrer que

$$A^n = PD^nP^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. En déduire que :

$$\mathrm{e}^A = P\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!}\right)P^{-1}$$

et calculer ainsi e^A.

Espaces vectoriels, familles, bases

Exercice 1 On notera v_i les vecteurs des familles ci-dessous.

1. $(-1,0,0)$,$(1,1,1)$, $(1,2,3)$ $\longrightarrow$ libre, maximale, donc base de $\mathbb{R}^3$, de dimension 3.
2. $(0,1,2)$,$(1,1,1)$, $(1,2,3)$ $\longrightarrow$ non libre. En effet, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_2+3\lambda_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_3=\lambda_2\\ \lambda_1=\lambda_2\\ 0=0\end{array}\right. .$$

   Ainsi, il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ non tous nuls tels que pourtant $\sum_i \lambda_i v_i = 0$: la famille n'est pas libre. On peut immédiatement en déduire qu'elle n'est pas génératrice puisqu'elle possède 3 éléments ; si elle était génératrice, ce serait une base et elle serait alors libre.
   Pour le montrer par le calcul, soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$; on cherche à montrer qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tel que $X=\sum_i \lambda_i v_i$, c'est-à-dire tel que :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_2+\lambda_3=x\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=y\\ \lambda_2+3\lambda_3=z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_3=x-\lambda_2\\ \lambda_1=-\lambda_2-2\lambda_3+y\\ 2y-x=z\end{array}\right.$$

   On constate ainsi qu'il y a une contrainte sur x,y,z ; si elle n'est pas vérifiée, X ne pourra pas s'écrire comme combinaison linéaire des v_i. Tous les vecteurs ne peuvent donc pas s'écrire comme combinaison linéaire des v_i (c'est le cas par exemple du vecteur $(0,1,2)$). La famille n'est pas génératrice.
   Pour finir, on constate que, par exemple, v_1 et v_2 sont libres, donc l'espace engendré par cette famille est de dimension deux (mais cet espace n'est PAS $\mathbb{R}^2$!)
3. $(1,2,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,3,-1)$ $\longrightarrow$ non libre car 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Par le calcul, cf le 2), même raisonnement.
   Elle est en revanche génératrice. En effet, soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$; par le calcul, on aboutit à :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_3=z-\lambda_4\\ \lambda_1=y-x-\lambda_4+z\\ \lambda_2=2x-y-2z+\lambda_4\end{array}\right.$$

   donc on peut trouver $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ tels que X soit combinaison linéaire des v_i (il en existe une infinité en fait) ; la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$, l'espace engendré est donc de dimension 3.
4. $(-1,1,2)$,$(2,0,0)$, $(0,1,1)$ $\longrightarrow$ libre, génératrice, base, dimension 3.

5. $(-1,2,0)$,$(2,4,0)$, $(3,6,0)$ $\longrightarrow$ non libre car $v_3 = \frac{3}{2}v_2$. Par le calcul, procéder comme 2). Elle n'est pas non plus génératrice de $\mathbb{R}^3$, même raisonnement que dans 2). L'espace engendré est de dimension 2.

Exercice 2 Il suffit de montrer que la famille a, b, c est libre et/ou génératrice. Dans les deux cas, la démarche est simple, il suffit de revenir à la définition et d'utiliser le fait que (u, v, w) est une base.

Par exemple, montrons que la famille est libre. Soient $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ tels que

$$\begin{array}{ll} & \lambda_a\ a + \lambda_b\ b + \lambda_c\ c = 0_E \\ \Leftrightarrow & \lambda_a\ (v+w) + \lambda_b\ (u+w) + \lambda_c\ (u+v+w) = 0_E \\ \Leftrightarrow & (\lambda_b + \lambda_c)\ u + (\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c)\ v + (\lambda_a + \lambda_c)\ w = 0_E. \end{array}$$

Comme la famille (u, v, w) est libre, ceci entraine :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_b + \lambda_c = 0 \\ \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 0 \\ \lambda_a + \lambda_c = 0 \end{array} \right.$$

et donc $\lambda_a = 0 = \lambda_b = \lambda_c$; la famille est libre. On peut en conclure que c'est une base puisqu'elle a le même nombre d'élément que (u, v, w).

Même démarche pour montrer qu'elle est génératrice, il suffit de montrer que tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs (a, b, c). Soit $x \in E$. Alors, comme (u, v, w) est une base de E, elle est génératrice et x s'écrit comme comb linéaire de ces trois vecteurs : il existe λ_u, λ_v, $\lambda_w \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_u\ u + \lambda_v\ v + \lambda_w\ w.$$

Comme (a, b, c) sont des combinaisons linéaires de (u, v, w), il est évident que x pourra également s'écrire comme combinaison linéaire de (a, b, c) (pour le montrer il suffit d'écrire $x = \lambda_a\ a + \lambda_b\ b + \lambda_c\ c = ... = (\lambda_b + \lambda_c)u + (\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c)v + (\lambda_a + \lambda_c)w$ et d'identifier $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$).

Exercice 3 Soient les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0,\ x = z\right\}, \\ G & = & \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z = x + y,\ x + y + t = 0\right\}. \end{array}$$

1. (a) Noyau d'une application linéaire ; pour F :

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x - z \end{pmatrix}.$$

et pour G

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} z - x - y \\ x + y + t \end{pmatrix}.$$

(b) $X \in F \Leftrightarrow y = 0$ et $x = z \Leftrightarrow X = (x, 0, x) = x\ (1, 0, 1) \longrightarrow$ un vecteur de base, dimension 1.

$X \in G \Leftrightarrow z = x + y$ et $t = -x - y \Leftrightarrow X = (x, y, x + y, -x - y) = x\ (1, 0, 1, -1) + y\ (0, 1, 1, -1) \longrightarrow$ deux vecteurs de base v_1 et v_2, dimension 2.

2. $(1, 0, 1, -1)$ apaprtient à G puisque c'est le vecteur de base v_1 de G. Il s'écrit donc $1\, v_1 + 0\, v_2$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{v_1, v_2}$

Applications linéaires et matrices

Exercice 4

1. $\ker(f) = G$, de base $v_1, v_2 = (1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, -1)$, dimension 2. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ car inclu et de même dimension.
2. f surjective, mais non injective car le noyau est différent de 0.

$$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

3. (a) famille libre maximale, base.

   (b)

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

Exercice 5 Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$f_1 = (1, 0, 0),\ f_2 = (1, 1, 0),\ f_3 = (1, 1, 1).$$

1. immédiat.
2. (a) famille libre maximale, base.

   (b)

$$P = P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Pour calculer Q, on écrit les relations entre les deux bases, et on l'inverse. On a :

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_1 + e_2 \\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = f_1 \\ e_2 = f_2 - f_1 \\ e_3 = f_3 - f_2 \end{cases}$$

d'où la matrice Q :

$$Q = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle e_1 \quad e_2 \quad e_3 \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

On a bien $QP = I_3$, donc $Q = P^{-1}$.

(c) On a la relation $[v]_{\mathcal{F}} = Q[v]_{\mathcal{E}} = (2, 5, -2)_{\mathcal{F}}$. Si on veut le faire sans utiliser la matrice Q, il faut trouver les λ_i tels que $v = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$; après résolution, on trouve $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -2$, d'où

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}.$$

(d) $w = (-1, 2, 3)_{\mathcal{F}}$. Alors $[w]_{\mathcal{E}} = P[w]_{\mathcal{F}} = (4, 5, 3)$.

(e) Soit l'application linéaire

$$h(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 3x_3 - x_1, x_2 - x_1).$$

i.

$$[h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

ii.

$$[h]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \ [h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \ P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = Q \ [h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \ P = ... = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réduction d'endomorphismes

Exercice 6

$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{R}$, valeurs propres : $3, 2, 1$, les vecteurs propres associés étant, respectivement : $(1/2, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$, matrice diagonalisable.

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; valeurs propres : $5, 3, 3$. Une base de E_5 est donnée par $(1, 2, 1)$, et Une base de E_3 est donnée par $(-1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$, donc matrice diagonalisable (multiplicité des racines égale à la dimension du sous-espace propre associé).

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; valeurs propres : $2, 2, 2$. Une base de E_2 est donnée par $(0, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$, donc matrice non diagonalisable.(deux vecteurs de base pour une valeur propre de multiplicité trois).

Exercice 7

1. Soit D la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Alors :
$D^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $D^3 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}$ $D^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 3^4 \end{pmatrix}$
2. On a :
$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
et par suite :

$$\mathrm{e}^D = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Comme A est diagonalisable, et en notant P sa matrice de passage, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (PDP^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}.P}_{Id}D\underbrace{P^{-1}}_{Id}\ldots\ldots\underbrace{P}_{Id}D\underbrace{P^{-1}.P}_{Id}DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

4. en utilisant la question précédente, on peut facilement calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable :

$$\mathrm{e}^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(PDP^{-1})^n}{n!} = \sum_{i=0}^{+\infty} P\frac{D^n}{n!}P^{-1} = P\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!}\right)P^{-1} = P\mathrm{e}^D P^{-1}$$

d'où :

$$\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui donne, après calculs :

$$\mathrm{e}^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 & -\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^3 \\ 2\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^3 & 2\mathrm{e}^5 & -2\mathrm{e}^5 + 2\mathrm{e}^3 \\ \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 & -\mathrm{e}^5 + 3\mathrm{e}^3 \end{pmatrix}.$$

Examen de Mathématiques

Algèbre linéaire

13 janvier 2009

Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème est approximatif. Une attention particulière sera portée aux justifications, à la clarté du raisonnement et à la rédaction.

Exercice 1 (7 points)

1. (a) Soit la famillede vecteurs $\{(1,1,-1),(1,1,0),(-1,0,1)\}$. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$? Est-elle libre ? Génératrice ?
   (b) même question avec la famille $\{(2,0,-1),(0,1,1)\}$.
2. Soit l'ensemble $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z = y - \frac{1}{2}x\right\}$.
   (a) Montrer que H est un espace vectoriel.
   (b) Donner une base de H ainsi que sa dimension.
3. Soit une application f définie par :

$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \frac{1}{2}x - y + z.$$

   Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 (6,5 points) *L'exercice qui suit n'est pas difficile et ne nécessite aucun calcul ; la plupart du temps, il suffit de revenir aux définitions des concepts en jeu pour s'en sortir. Toutes les questions peuvent être traitées sans avoir fait les précédentes.*

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E non identiquement nul tel que $f \circ f = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall x \in E,\ f\left(f(x)\right) = 0_E \text{ (on dit que } f \text{ est } \textit{nilpotent})$$

1. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ (*on montrera que si un élément appartient à* $\mathrm{Im}(f)$, *alors il appartient aussi à* $\ker(f)$)
   (b) En déduire que $rg(f)$ vérifie l'inégalité :

$$rg(f) \leq 3 - rg(f),$$

   (c) En déduire $rg(f)$, puis $\dim(\ker(f))$?
2. On se fixe $a \notin \ker(f)$.

(a) Montrer que la famille $\{a, f(a)\}$ est libre dans E.

(b) Montrer qu'il existe (sans donner son expression) un vecteur $v_3 \in \ker(f)$ tel que la famille $\{f(a), v_3\}$ soit libre dans E.

(c) En déduire que la famille $\{a, f(a), v_3\}$ est une base de E.

(d) Donner l'expression de la matrice représentative de f dans cette base.

Exercice 3 (9,5 points) Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{E}$ est :

$$[h]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que ses valeurs propres sont $-2, 1, 1$.

   (b) Déterminer une base du sous-espace propre E_{-2}, puis de E_1.

   (c) La matrice est-elle diagonalisable ?

2. (a) Calculer $(A - I_3)^2$.

   (b) Montrer que le vecteur $v_3 := (0, 3, 1)$ appartient à $\ker\left((A - I_3)^2\right)$, mais n'appartient **pas** à E_{-2} ni à E_1.

   (c) On note $\mathcal{V}$ la base constituée des vecteurs propres calculés en 1.b) et de v_3. Calculer $[h]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ (il faudra pour cela calculer la matrice de passage et son inverse). Quelle est son allure ? Que peut-on dire de ses éléments diagonaux ?

   Nota : on dit qu'on a *triangularisé* (ou *trigonalisé*) la matrice A.

question bonus : On peut montrer qu'une matrice est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans le corps $\mathbb{K}$ (il n'est bien sûr pas demandé de le faire !). Pouvez-vous (brièvement) expliquer pourquoi toute matrice est triangularisable dans $\mathbb{C}$ et non dans $\mathbb{R}$?

Notions d'Analyse

Céline Casenave

Table des matières

1 Limites, continuité et dérivabilité **3**
1.1 Limites . . . 3
1.1.1 Limite finie d'une fonction en un point . . . 3
1.1.2 Limite infinie d'une fonction en un point . . . 3
1.1.3 Limite d'une fonction lorsque x tend vers $\pm\infty$ . . . 3
1.1.4 Limites à droite et à gauche . . . 4
1.1.5 Calcul de limites . . . 4
1.1.6 Propriétés sur les limites . . . 5
1.2 Continuité . . . 6
1.2.1 Définition et propriétés . . . 6
1.2.2 Théorèmes principaux sur les fonctions continues . . . 6
1.2.3 Fonctions réciproques . . . 7
1.3 Dérivabilité . . . 7
1.3.1 Définition et propriétés . . . 7
1.3.2 Théorèmes principaux sur les fonctions dérivables . . . 9

2 Fonctions usuelles **9**
2.1 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances . . . 9
2.1.1 Fonction logarithme . . . 9
2.1.2 Fonction exponentielle . . . 10
2.1.3 Fonctions puissances . . . 11
2.1.4 Croissances comparées des fonctions ln, exp et puissances . . . 12
2.2 Fonctions circulaires . . . 12
2.2.1 Fonctions cosinus et sinus . . . 12
2.2.2 Fonctions tangente . . . 14
2.2.3 Fonctions circulaires réciproques . . . 16
2.3 Fonctions hyperboliques . . . 19
2.3.1 Fonctions cosh, sinh et tanh . . . 19
2.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques arg sinh, arg cosh et arg tanh . . . 21

3 Développements limités et équivalents **23**
3.1 Fonction négligeable, dominée et équivalente . . . 23
3.2 Développements limités . . . 27

4 Intégration **30**
4.1 Intégrales de Riemann 30
4.1.1 Définition et propriétés 30
4.1.2 Primitives et calculs d'intégrales 32
4.2 Intégrales généralisées 33

1 Limites, continuité et dérivabilité

1.1 Limites

La plupart des notions permettant de caractériser la régularité d'une fonction font appel à la notion de limite d'une fonction, à laquelle est consacré ce paragraphe.

Dans la suite, on considère une fonction f et on note D_f son domaine de définition, que l'on supposera ici être un intervalle. On considère également un point x_0 qui est soit un élément de D_f soit l'une de ses extrémités.

1.1.1 Limite finie d'une fonction en un point

Dfinition 1

On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, si $|x - x_0| \leqslant \delta$, alors $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Remarque : on marque plus synthétiquement :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

1.1.2 Limite infinie d'une fonction en un point

Dfinition 2

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

Dfinition 3

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) < M.$$

1.1.3 Limite d'une fonction lorsque x tend vers $\pm\infty$

On suppose ici que f est définie sur $]a, +\infty[\subset D_f$.

Dfinition 4

On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f,\ x \geqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f,\ x \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Dfinition 5

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f,\ x \geqslant \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

Remarque : les définitions de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ sont analogues.

1.1.4 Limites à droite et à gauche

Dfinition 6

Une fonction f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $D_f \cap]x_0, +\infty[$ tend vers l quand x tend vers x_0. On note :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x).$$

On définit de la même façon la limite à gauche.

1.1.5 Calcul de limites

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I ou l'une de ses extrémités. On suppose que f et g admettent tous deux une limite en x_0 et on note :

$$l_g = \lim_{x\to x_0} g(x) \text{ et } l_f = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

On a :

▶ Addition : tableau des valeurs de $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x)$:

$l_f \setminus l_g$	$\in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\in \mathbb{R}$	$l_f + l_g$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

▶ Multiplication : tableau des valeurs de $\lim_{x\to x_0} (fg)(x)$:

$l_f \setminus l_g$	$\in \mathbb{R}^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\in \mathbb{R}^*$	$l_f\, l_g$	0	$sign(l_f) \times \infty$	$-sign(l_f) \times \infty$
0	0	0	?	?
$+\infty$	$sign(l_g) \times \infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-sign(l_g) \times \infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

▶ Division : tableau des valeurs de $\lim_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x)$:

$l_f \setminus l_g$	$\in \mathbb{R}^*$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\in \mathbb{R}^*$	$\frac{l_f}{l_g}$	$sign(l_f)\times\infty$	$-sign(l_f)\times\infty$	0	0
0	0	?	?	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

▶ Composition :

Théorème 7

Théorème : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit x_0 un élément de l'intervalle I ou l'une de ses extrémités.
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et si $\lim_{y\to l} g(y) = m \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors :

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = m.$$

1.1.6 Propriétés sur les limites

Voici une suite de propriétés sur les limites pouvant être utiles en pratique :
▶ Si une fonction f admet une limite finie en un point alors cette limite est unique
▶ Si f est définie en x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
▶ Si f est définie sur $]x_0 - a, x_0 + a[\setminus\{x_0\}$ alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l.$$

▶ Soient f et g des fonctions réelles définies sur un intervalle I et qui vérifient :

$$\forall x \neq x_0,\ f(x) > g(x).$$

Si f et g admettent une limite en x_0 alors, on a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

▶

Théorème 8 (*Théorème des gendarmes, ou d'encadrement*)

Soient f, g et h des fonctions réelles définies sur un intervalle I et qui vérifient :

$$\forall x \neq a,\ f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x).$$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$, alors h admet une limite quand x tend vers a et on a :

$$\lim_{x\to a} h(x) = L.$$

1.2 Continuité

1.2.1 Définition et propriétés

Dfinition 9

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en un point $x_0 \in I$ si elle est définie en x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Une fonction f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I.

De même que pour les limites, on définit les notions de continuité à droite et à gauche en un point x_0.

Pour montrer la continuité d'une fonction, le théorème suivant est très utile.

Théorème 10

- *Si $f, g \in \mathcal{C}(I)$ alors $f + g$, $f - g$ et $f.g \in \mathcal{C}(I)$.*
- *Si $f, g \in \mathcal{C}(I)$ et si $g(x) \neq 0$ sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I)$.*
- *Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I)$.*

1.2.2 Théorèmes principaux sur les fonctions continues

Théorème 11 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit f une fonction continue sur un intervalleI et $a, b \in I$. Alors pour toute valeur γ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 12

L'image $f(I)$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ par une fonction continue est encore un intervalle de $\mathbb{R}$, dont les bornes sont $\inf_I f := \inf\{f(x),\, x \in I\}$ et $\sup_I f := \sup\{f(x),\, x \in I\}$.

Autrement dit, si f continue sur $[a, b]$ atteint les valeurs $f(a)$ et $f(b)$alors f atteint toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. En particulier, si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

Corollaire 13

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors f est bijective de l'intervalle I dans l'intervalle $f(I)$.

Remarque : *Si f est strictement croissante et* :

- si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$
- si $I =]a, b[$ alors $f(I) =] \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$
- si $I = [a, b[$ alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$
- si $I =]a, b]$ alors $f(I) =] \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), f(b)]$

Si f est strictement décroissante et :

- si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(b), f(a)]$
- etc.

1.2.3 Fonctions réciproques

Thorme-Dfinition 14

Si f est une bijection de I dans $f(I)$, alors il existe une fonction notée f^{-1}, appelée fonction réciproque de f et définie sur $f(I)$ telle que, $\forall x \in I$ et $\forall y \in f(I)$:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

On a vu précédemment que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Ceci n'est plus vrai pour l'image réciproque d'un intervalle par une fonction continue. De plus, la réciproque d'une fonction continue n'est pas forcément continue. Le théorème ci-dessous nous donne une condition suffisante pour assurer la continuité de la fonction réciproque :

Théorème 15

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors l'application réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et stricement monotone sur $f(I)$ de même monotonie que f..

Remarque : Représentation graphique : la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormal est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1.3 Dérivabilité

1.3.1 Définition et propriétés

Dfinition 16

Une fonction f est dite dérivable en un point $x_0 \in D_f$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et est FINIE (i.e. $\in \mathbb{R}$). La valeur de cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée dérivée de f en x_0.

Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, l'application $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.

Notation : On note f'' la dérivée seconde de f définie par $f'' = (f')'$. On note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ième}$ de f définie par la récurrence $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Dfinition 17

On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continues, dérivables et à dérivée continue sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions continues, n fois dérivables et à dérivée $n^{ième}$ continue sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions continues et indéfiniment dérivables.

Remarque : On appelle dérivée à droite (respectivement à gauche) de f en x_0 la quantité $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$).

Interprétation géométrique :: On montre que la droite d'équation $y = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$ est la tangente à la courbe de f au point x_0 : $f'(x_0)$ est donc la pente de cette tangente.

On a la proposition importante suivante :

Proposition 18

Si f dérivable en un point $x_0 \in D_f$, alors f est continue en ce point x_0.

Attention : la réciproque est fausse !

Le théorème suivant permet de prouver la dérivabilité de nombreuses fonctions ainsi que de calculer leurs fonctions dérivées.

Théorème 19

Soient f et g deux fonctions dérivables en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

► *$f+g$ et $f-g$ sont dérivables en x_0 et on a :*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ et } (f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

► *$f\,g$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$(f\,g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

► *si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

► *Si f fonction dérivable sur l'intervalle I et g fonction dérivable sur l'intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

► *Si $f : I \to f(I)$ est strictement monotone et continue sur I et telle que $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to I$, est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :*

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

1.3.2 Théorèmes principaux sur les fonctions dérivables

Théorème 20 (*Théorème de Rolle*)

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 21 (*Théorème des accroissements finis*)

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

2.1.1 Fonction logarithme

Dfinition 22

La fonction logarithme, notée ln *est la primitive de* $x \longmapsto \frac{1}{x}$ *qui s'annule en* 1.

Domaine de définition : La fonction ln est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Continuité : La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dérivabilité : La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que, :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Tableau de variations et tracé :

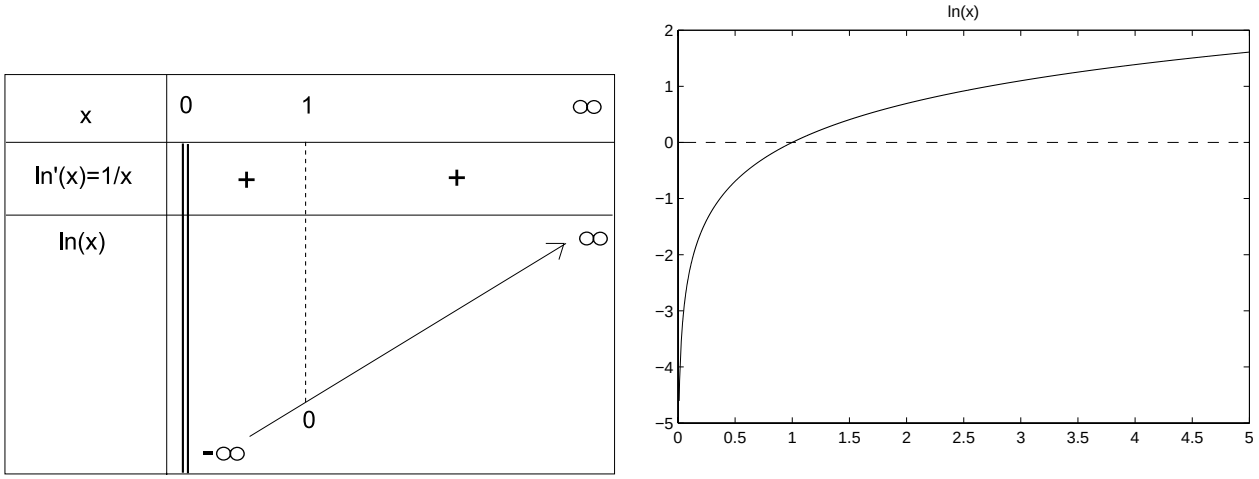

FIGURE 1 – tableau de variations et tracé de la fonction ln

Propriétés : La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Valeurs remarquables :

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1.$$

Relations :
$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y), \\ \ln(\frac{1}{x}) &= -\ln(x), \\ \ln(x^\alpha) &= \alpha \ln(x). \end{aligned}$$

2.1.2 Fonction exponentielle

Dfinition 23

La fonction exponentielle, notée exp *est la fonction réciproque de* ln

Domaine de définition : exp est définie sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par définition, on a, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$\exp(y) = x \Longleftrightarrow y = \ln(x).$$

Notation : On note, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = e^x.$$

Continuité : La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité : La fonction exp est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x).$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to\infty}\exp(x)=+\infty.$$

Tableau de variations et tracé :

x	-∞	0	∞
exp'(x)=exp(x)	+	+	
exp(x)	0	1	∞

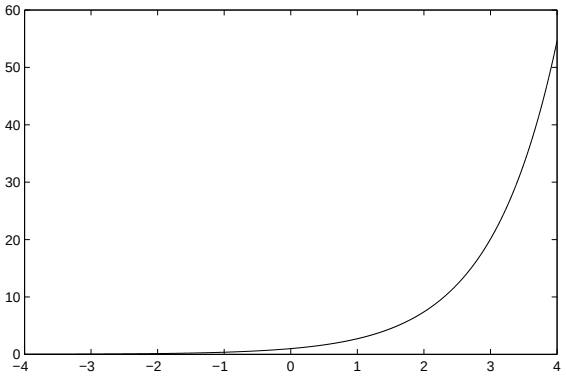

FIGURE 2 – tableau de variations et tracé de la fonction exp

Valeurs remarquables :

$$\exp(0)=1.$$

Relations :
$\forall x,y\in\mathbb{R}$, $\forall\alpha\in\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp(x)+\exp(y),\\ \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)},\\ \exp(\alpha x) &= (\exp(x))^{\alpha}.\end{aligned}$$

2.1.3 Fonctions puissances

Dfinition 24

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, on appelle la fonction puissance α la fonction notée ici f_α :

$$f_\alpha : x \longmapsto x^{\alpha}=e^{\alpha\ln(x)}.$$

Domaine de définition : La fonction puissance d'ordre α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Continuité : La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dérivabilité : La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée vaut (formule de dérivation composée) :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'_\alpha(x)=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln(x)}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

	$\lim_{x\to0}x^\alpha$	$\lim_{x\to\infty}x^\alpha$
$\alpha\in]-\infty,0[$	$+\infty$	0
$\alpha\in]0,+\infty[$	0	$+\infty$

Tableau de variations :

Cas où α<0

x	0		1		∞
$(x^\alpha)'=\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	-	‖	-	
x^α	‖ ∞	↘	‖ 1	↘	0

Cas où α>0

x	0		1		∞
$(x^\alpha)'=\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	+	‖	+	
x^α	‖ 0	↗	‖ 1	↗	∞

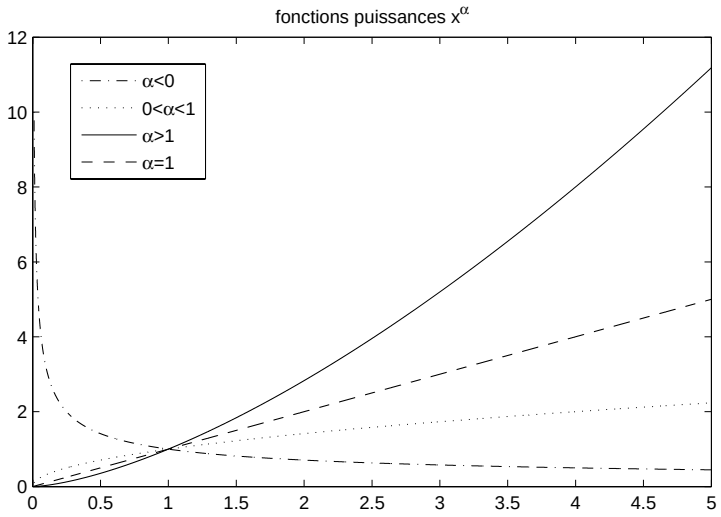

FIGURE 3 – tableau de variations et tracé des fonctions puissances

2.1.4 Croissances comparées des fonctions ln, exp et puissances

Proposition 25

$\forall \alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} &= 0 \\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} &= +\infty. \end{aligned}$$

Autrement dit, "les fonctions puissances l'emportent sur le logarithme" et "l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances".

2.2 Fonctions circulaires

2.2.1 Fonctions cosinus et sinus

Dfinition 26

Les fonctions cosinus et sinus, notées respectivement cos *et* sin, *sont l'unique couple de fonctions dérivables C, $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :*

$$\begin{aligned} C' &= -S,\ S' = C, \\ C(0) &= 1 \text{ et } S(0) = 0. \end{aligned}$$

Domaine de définition : les fonctions cos et sin sont définies sur tout $\mathbb{R}$.
Continuité : Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité : Par définition, cos et sin sont donc indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\cos' = -\sin \text{ et } \sin' = \cos .$$

Parité : La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

Périodicité : Les fonctions cos et sin sont périodiques de plus petite période strictement positive 2π :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N},\ \cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \text{ et } \sin(x) = \sin(x + 2k\pi).$$

Tableaux de variation et tracés :
Comme cos et sin sont périodiques de période 2π, il suffit d'étudier ces deux fonctions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par exemple. De plus, cos et sin sont respectivement paire et impaire, donc on réduit l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. On obtient les tableaux de variation suivants :

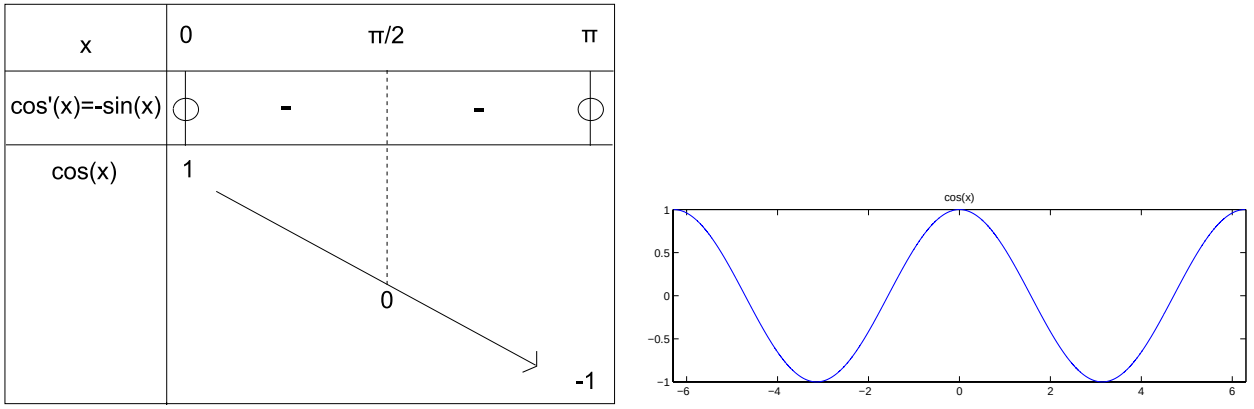

FIGURE 4 – tableau de variations et tracé de la fonction cos

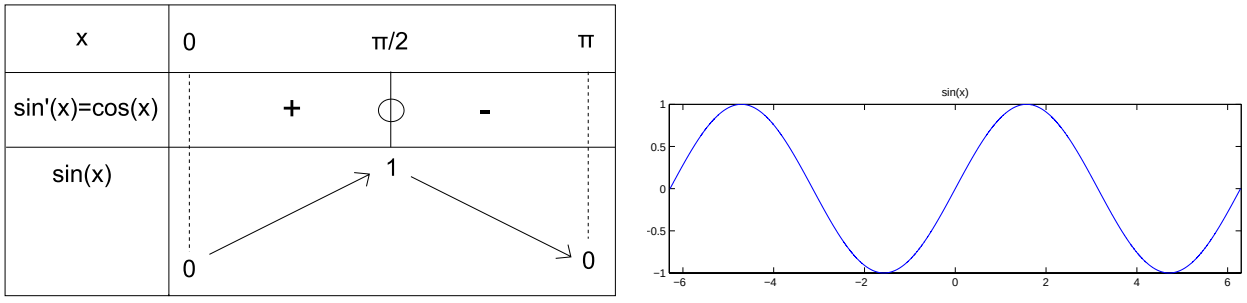

FIGURE 5 – tableau de variations et tracé de la fonction sin

On notera que les graphes des deux fonctions cos et sin sont déphasés (voir figures 4 et 5) ou translatées l'une de l'autre. On a en effet :

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x) \text{ et } \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

Enfin, on a :

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \text{ et } \sin(x+\pi) = -\sin x.$$

Valeurs remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Formules trigonométriques :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2} \\
\sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \\
\sin a \cos b &= \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\
\sin(2a) &= 2\sin a \cos a \\
\cos^2 a &= \frac{1+\cos(2a)}{2} \text{ et } \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}
\end{aligned}$$

2.2.2 Fonctions tangente

Dfinition 27

La fonction tangente, notée tan *est la fonction définie par :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Domaine de définition : : La fonction tan est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$(la fonction n'est en effet pas définie lorsque $\cos x = 0$).

Continuité : La fonction tan est continue sur l'ensemble de son domaine de définition.

Dérivabilité : La fonction tan est dérivable sur l'ensemble de son domaine de définition.et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Parité : La fonction tan est impaire :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x).$$

Périodicité : La fonction tan est périodique de période π :

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \lim_{x \xrightarrow{>} k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \xrightarrow{<} k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty.$$

Tableau de variations et tracé :

Comme la fonction tan est périodique de période π et impaire, on peut réduire son intervalle d'étude à $[0, \pi]$. On a :

x	0	π
tan'(x)=1+tan²(x)	+	‖
cos(x)	0 ↗ ∞	‖

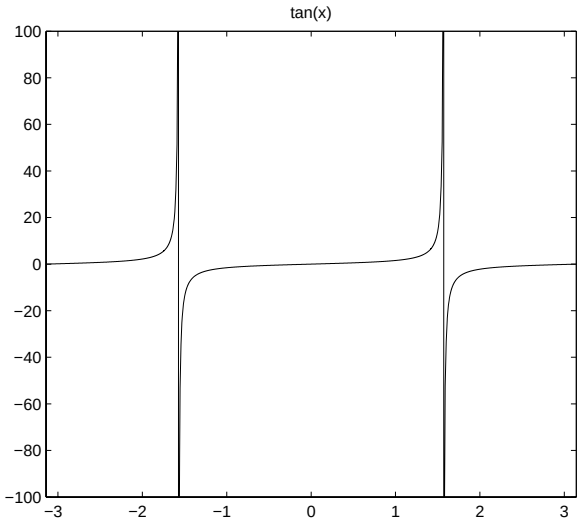

FIGURE 6 – tableau de variations et tracé de la fonction tan

Valeurs remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\\ \tan^2 a &= \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}\end{aligned}$$

2.2.3 Fonctions circulaires réciproques

Pour définir la fonction réciproque d'une fonction, il faut que celle-ci soit monotone et continue, ce qui n'est pas le cas des fonctions circulaires. Pour définir leurs fonctions réciproques, il faut donc restreindre les fonctions circulaires à des intervalles sur lesquels elles sont strictement monotones et continues.

Dfinition 28 (*et domaines de définition*)

▶ *La fonction* sin *est continue et strictement monotone sur* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. *La fonction* arcsin *est l'application réciproque de la bijection* $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$. *On la note* $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *et on a :*

$$\forall x\in[-1,1],\ \arcsin x=y\Longleftrightarrow x=\sin y \text{ et } y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

▶ *La fonction* cos *est continue et strictement monotone sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$. *La fonction* arccos *est l'application réciproque de la bijection* $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$. *On la note* $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ *et on a :*

$$\forall x\in[-1,1],\ \arccos x=y\Longleftrightarrow x=\cos y \text{ et } y\in[0,\pi].$$

▶ *La fonction* tan *est continue et strictement monotone sur* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. *La fonction* arctan *est l'application réciproque de la bijection* $\tan:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$. *On la note* $\arctan:\mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *et on a :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan x=y\Longleftrightarrow x=\tan y \text{ et } y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

Attention : On a la relation :

$$\cos(\arccos x)=x,\ \forall x\in[-1,1],$$

mais on n'a pas toujours $\arccos(\cos x)=x$.
Exemple : $x=-\frac{\pi}{2}$. On a : $\cos(-\frac{\pi}{2})=0$ et $\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$.
On peut faire la même remarque pour arcsin et arctan.

Continuité et dérivabilité :
La fonction arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arccos est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Parité : Les fonctions arcsin et arctan sont impaires.
Tableaux de variation et tracé :
La fonction arcsin étant impaire, on l'étudie sur $[0,1]$.

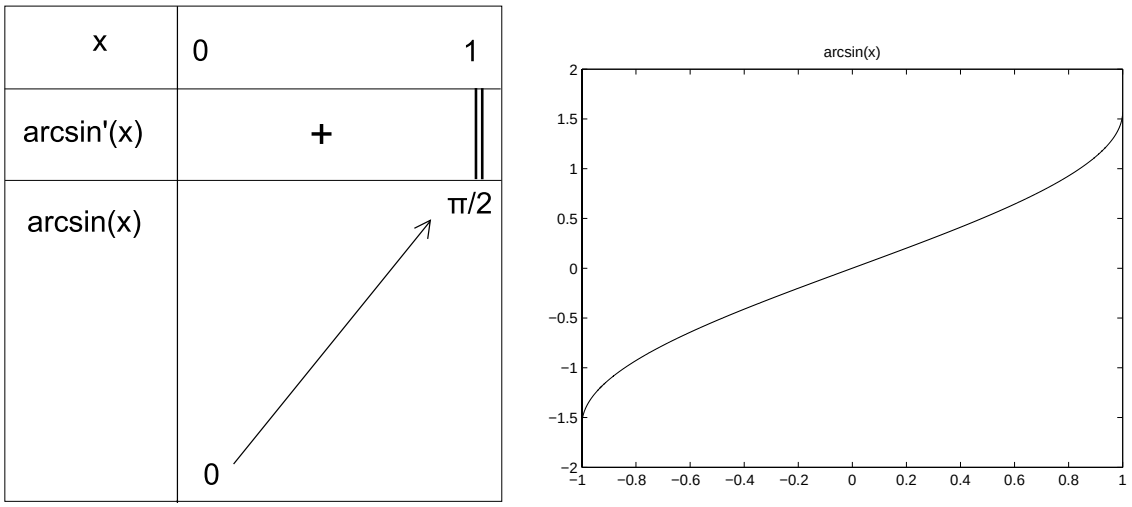

FIGURE 7 – Tracé de la fonction arcsin

On étudie la fonction arccos sur l'ensemble de sont domaine de définition $[-1,1]$.

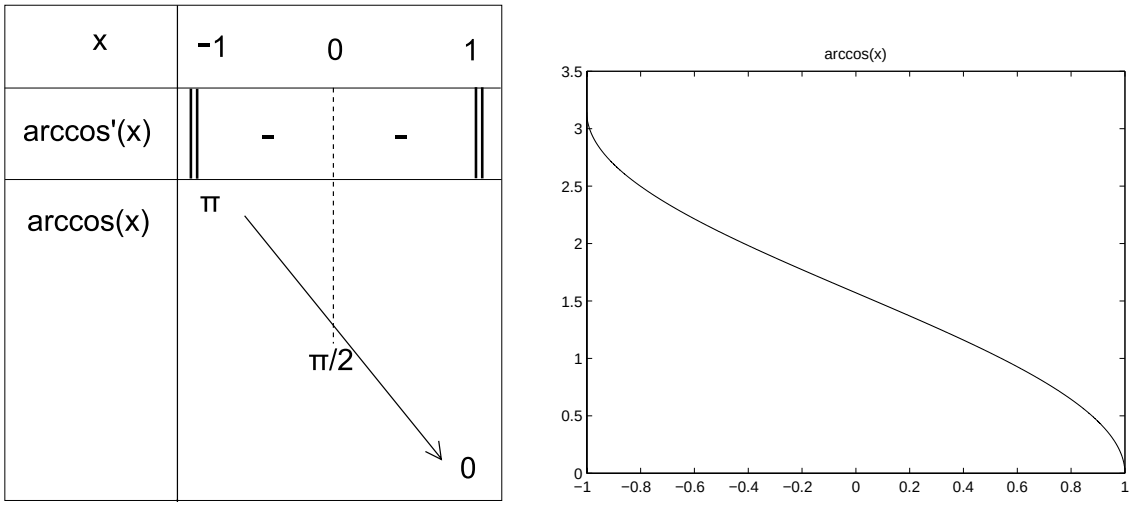

FIGURE 8 – Tracé de la fonction arccos

La fonction arctan étant impaire, on l'étudie uniquement sur $[0, +\infty[$.

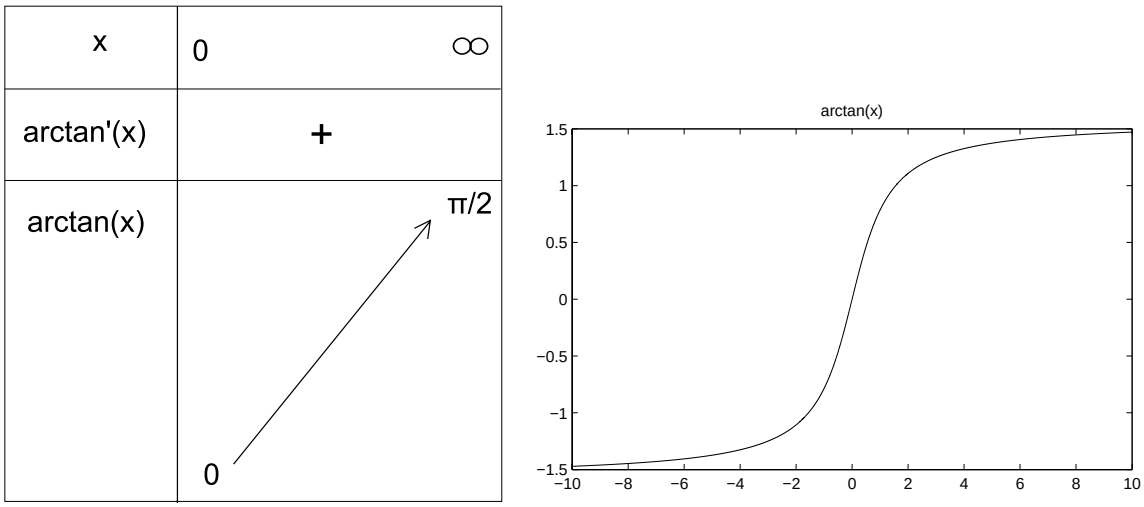

FIGURE 9 – Tracé de la fonction arctan

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

2.3 Fonctions hyperboliques

2.3.1 Fonctions cosh, sinh et tanh

Dfinition 29 (*et domaines de définition*)

▶ *La fonction cosinus hyperbolique, notée* cosh *(ou parfois ch) est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rccc} \cosh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

▶ *La fonction sinus hyperbolique, notée* sinh *(et parfois sh) est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rccc} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

▶ *La fonction tangente hyperbolique, notée* tanh *(et parfois th) est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rccc} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}. \end{array}$$

Continuité et dérivabilité :
La fonction cosh, sinh et tanh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned} \cosh' &= \sinh \\ \sinh' &= \cosh \\ \tanh' &= 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2} \end{aligned}$$

Parité : La fonction cosh est paire, la fonction sinh est impaire et la fonction tanh est impaire.
Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \sinh x &= -\infty \text{ et } \lim_{x\to\infty} \sinh x = +\infty, \\ \lim_{x\to-\infty} \cosh x &= \lim_{x\to\infty} \cosh x = +\infty, \\ \lim_{x\to-\infty} \tanh x &= -1 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \tanh x = +1. \end{aligned}$$

Tableaux de variation et tracés :

x	0	$+\infty$
sinh'(x)=cosh(x)	+	
sinh(x)	0 ↗	$+\infty$

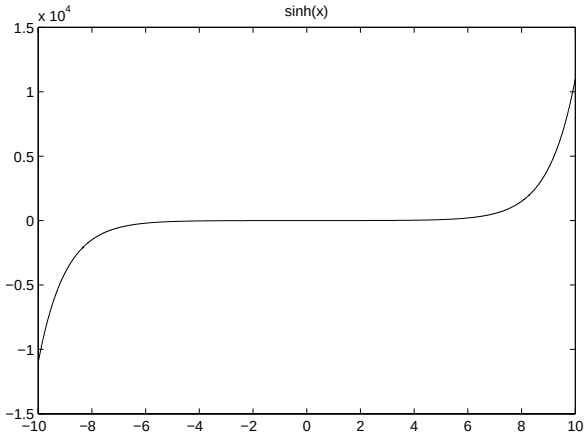

FIGURE 10 – tableau de variations et tracé de la fonction sinh

x	0	$+\infty$
cosh'(x)=sinh(x)	∅	+
cosh(x)	1 ↗	$+\infty$

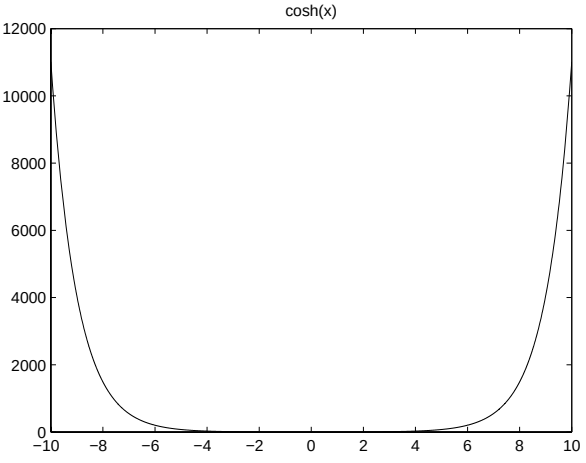

FIGURE 11 – tableau de variations et tracé de la fonction cosh

x	0	∞
tanh'(x)=1-tanh²(x)	+	
tanh(x)	0 ↗	1

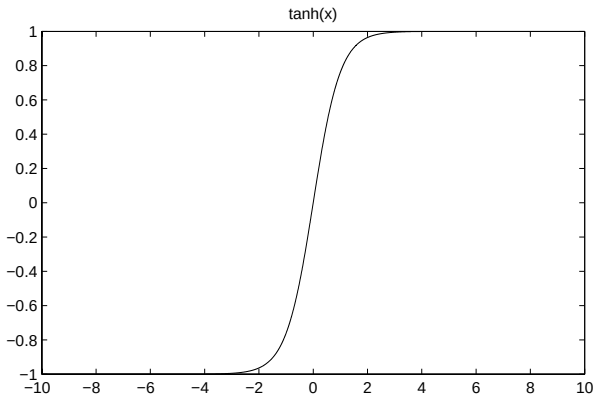

FIGURE 12 – tableau de variations et tracé de la fonction tanh

Formules :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

2.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques arg sinh, arg cosh et arg tanh

Dfinition 30 (*et domaines de définition*)

► *La fonction argument du sinus hyperbolique est l'application réciproque de la bijection* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On la note* $\arg\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

► *La fonction argument du cosinus hyperbolique est l'application réciproque de la bijection* $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$. *On la note* $\arg\cosh : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *et on a :*

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

►*La fonction argument de la tangente hyperbolique est l'application réciproque de la bijection* $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$. *On la note* $\arg\tanh :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

Continuité et dérivabilité :
La fonction arg sinh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\arg\sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La fonction arg cosh est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée :

$$\arg\cosh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

La fonction $\arg\tanh$ est continue et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\arg\tanh'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Variations et tracés :

Les fonctions $\arg\sinh$, $\arg\cosh$ et $\arg\tanh$ sont strictement croissantes sur leur domaines de définition respectifs.

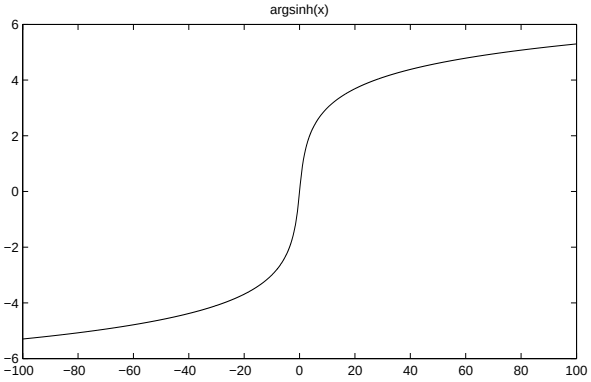

FIGURE 13 – Tracé de la fonction $\arg\sinh$

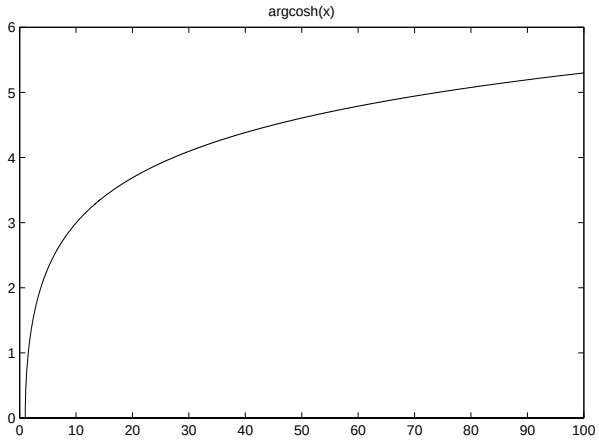

FIGURE 14 – Tracé de la fonction $\arg\cosh$

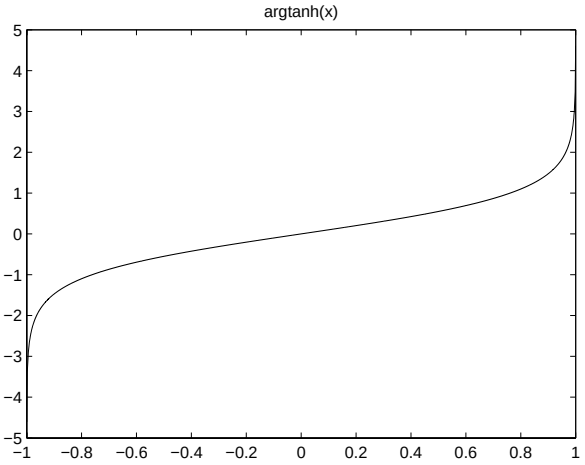

FIGURE 15 – Tracé de la fonction arg tanh

3 Développements limités et équivalents

Dans ce paragraphe on va chercher à comparer des fonctions **localement**, c'est à dire autour d'un point : en mathématiques, on parle de "voisinage d'un point".

Dfinition 31 (*Voisinage*)

On appelle ***voisinage d'un réel*** x_0 *toute partie de* $\mathbb{R}$ *qui contient un intervalle ouvert contenant* x_0.

On appelle ***voisinage de*** $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*) toute partie de* $\mathbb{R}$ *qui contient un intervalle de la forme* $]A, +\infty[$ *(respectivement* $]-\infty, A[$*) avec* $A \in \mathbb{R}$.

On dit qu'une ***propiété est réalisée au voisinage d'un point*** *s'il existe un voisinage du point dans lequel la propriété est vérifiée.*

Rappel : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

- **intervalle ouvert :** intervalle de la forme $]a; b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
- **intervalle fermé :** intervalle de la forme $[a; b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$
- **intervalle semi-ouvert :** intervalle de la forme $]a; b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$ ou $[a; b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$

3.1 Fonction négligeable, dominée et équivalente

Les premières notions dont on dispose pour comparer deux fonctions au voisinage d'un point sont les notions de fonction négligeable, fonction dominée et fonction équivalente.

Dfinition 32 (*Fonction négligeable, dominée et équivalente*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou l'une de ses extrémités (x_0 pouvant être égal à $\pm\infty$). On considère deux fonctions f,$g : I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$.

► *On dit que f* ***est négligeable devant g au voisinage de*** *$x_0 \in I$ si il existe un voisinage $v(x_0)$ de x_0 et une fonction $\varepsilon : v(x_0)\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall x \in v(x_0)\backslash\{x_0\},\ f(x) = \varepsilon(x)\, g(x) \text{ et } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f = o_{x_0}(g)$ et on dit que f est un "petit o de g au voisinage de x_0".

► *On dit que f* ***est dominée par g au voisinage de*** *$x_0 \in I$ si :*

$$\exists C > 0 \text{ et } \exists v(x_0) \text{ un voisinage de } x_0 \text{ tels que } \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C,\ \forall x \in v(x_0).$$

On note alors $f = O_{x_0}(g)$ et on dit que f est un "grand O de g au voisinage de x_0".

► *On dit que f* ***et g sont équivalentes au voisinage de*** *x_0 si $f - g = o_{x_0}(g)$.*
On note alors $f \underset{x_0}{\backsim} g$.

En pratique, on utilisera souvent la proposition suivante.

Proposition 33 (*Caractérisation*)

Si $\frac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors on a :

$$f = o_{x_0}(g) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

et

$$f \underset{x_0}{\backsim} g \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarque : Le seul cas où $\frac{f}{g}$ n'est pas définie dans un voisinage de x_0 est lorsqu'il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(y_n) = 0$ et $y_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$.

C'est le cas par exemple lorsque $g(x) = \cos(\frac{1}{x-x_0})$. En effet, le cosinus s'annule en tout point $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, donc g s'annule en tout point de la forme $x_0 + \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $x_0 + \frac{2}{(2k+1)\pi} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$.

Exemples : Fonctions négligeables

- $\forall \alpha > 0$, $\ln x = o_\infty(x^\alpha)$ au voisinage de $+\infty$. En effet, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o_\infty(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$. En effet, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha > \beta$, $x^\alpha = o_0(x^\beta)$ au voisinage de 0. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-\beta} = 0$.

Fonctions dominées

- $\forall \alpha > 0$, $\forall k > 0$, $x^\alpha = O(k\, x^\alpha)$ au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{x^\alpha}{k\, x^\alpha}\right| = \left|\dfrac{1}{k}\right|$ majorée.
- de même, $\forall \alpha > 0$, $\forall k > 0$, $k\, x^\alpha = O(x^\alpha)$ au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{k\, x^\alpha}{x^\alpha}\right| = |k|$ majorée.

Fonctions équivalentes

• soit $f : x \longmapsto \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ avec $p \leqslant n$. Alors, $f(x) \underset{0}{\backsim} a_p x^p$ et $f(x) \underset{\pm\infty}{\backsim} a_n x^n$.

Proposition 34

•
$$f = o(g) \Longrightarrow f = O(g) \tag{1}$$

•
$$f \backsim g \Longrightarrow \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration : Pour démontrer la proposition, on va commencer par montrer le résultat suivant :

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0. (3)

En effet, soit x_0 un élément de l'intervalle I ou l'une de ses extrémités, et soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
Cas où $x_0 \in R$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\}, |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \\ &\Longrightarrow \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f \setminus \{x_0\}, |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant 1 \end{aligned}$$

Or

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l|$$

donc :

$$\begin{aligned} &\exists v(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ un voisinage de } x_0 \text{ tels que } |f(x)| \leqslant 1 + |l|, \forall x \in v(x_0) \\ \Longleftrightarrow \quad &f \text{ bornée au voisinage de } x_0. \end{aligned}$$

Cas où $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$: démonstration analogue laissée au lecteur.

Revenons à présent à la démonstration de (1) et de (2).
Preuve de (1) : On a : $f = o(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ce qui d'après (3) implique que $\frac{f}{g}$ bornée au voisinage de x_0 ce qui est la définition de $f = O(g)$.
Preuve de (2) : $f \backsim g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $\frac{f(x)}{g(x)}$ bornée au voisinage de $x_0 \Longleftrightarrow f = O(g)$. On fait de même pour $g = O(f)$ puisque $f \backsim g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. ■

On peut manipuler assez facilement les fonctions negligeables, dominées et équivalentes du fait de certaines implications ou équivalences. On a en effet les propositions suivantes :

Proposition 35 (*opérations sur les fonctions négligeables et dominées*)

Soient f, g, h, u, v des,fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
• *addition :*

$$\begin{cases} f = o(g) \\ h = o(g) \end{cases} \Longrightarrow f + h = o(g), \qquad \begin{cases} f = O(g) \\ h = O(g) \end{cases} \Longrightarrow f + h = O(g)$$

Attention : par contre, $f = o(g)$ et $u = o(v) \nRightarrow f + u = o(g + v)$.

• *multiplication par un scalaire*: *Soit* $k \in \mathbb{R}^*$,

$$f = o(g) \Longrightarrow kf = o(g), \qquad f = O(g) \Longrightarrow kf = O(g)$$

• *produit :*

$$f = o(g) \Longrightarrow hf = o(hg), \qquad f = O(g) \Longrightarrow hf = 0(hg),$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} f = o(g) \\ u = o(v) \end{array} \right. \Longrightarrow fu = o(gv), \qquad \left\{ \begin{array}{l} f = O(g) \\ u = O(v) \end{array} \right. \Longrightarrow fu = O(gv), \qquad \left\{ \begin{array}{l} f = O(g) \\ u = o(v) \end{array} \right. \Longrightarrow fu = o(gv),$$

•

$$\left\{ \begin{array}{l} f = O(g) \\ g = O(h) \end{array} \right. \Longrightarrow f = O(h), \qquad \left\{ \begin{array}{l} f = O(g) \\ g = o(h) \end{array} \right. \Longrightarrow f = o(h), \qquad \left\{ \begin{array}{l} f = o(g) \\ g = O(h) \end{array} \right. \Longrightarrow f = o(h),$$

• *composition à droite :*

$$\left\{ \begin{array}{l} f = o_{x_0}(g) \\ \lim_{x \to y_0} h = x_0 \end{array} \right. \Longrightarrow f \circ h = o_{y_0}(g \circ h), \qquad \left\{ \begin{array}{l} f = O_{x_0}(g) \\ \lim_{x \to y_0} h = x_0 \end{array} \right. \Longrightarrow f \circ h = O_{y_0}(g \circ h).$$

Attention : ce résultat est faux avec la composition à gauche.

Proposition 36 (*opérations sur les fonctions équivalentes*)

Soient f, g, h, u, v *des fonctions définies au voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}$.

• *Symétrie et transitivité : Si* f *et* g *ne s'annulent pas au voisinage de* x_0, *alors :*

$$f \backsim g \Longleftrightarrow g \backsim f, \qquad et \qquad \left\{ \begin{array}{l} f \backsim g \\ g \backsim h \end{array} \right. \Longrightarrow f \backsim h.$$

• *addition : On n'a pas le droit d'additionner des équivalents !!!* $f \backsim g$ *et* $u \backsim v \not\Rightarrow f + u \backsim g + v$.

• *produit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} f \backsim g \\ u \backsim v \end{array} \right. \Longrightarrow fu \backsim gv$$

• *quotient :*

$$\left\{ \begin{array}{l} f \backsim g \\ u \backsim v \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{f}{u} \backsim \frac{g}{v}$$

• *puissance : soit* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f \backsim g \Longrightarrow f^\alpha \backsim g^\alpha$$

où $f^\alpha : x \longmapsto (f(x))^\alpha$

• *composition à droite :*

$$\left\{ \begin{array}{l} f \backsim_{x_0} g \\ \lim_{x \to y_0} h = x_0 \end{array} \right. \Longrightarrow f \circ h \backsim_{y_0} (g \circ h),$$

Attention : ce résultat est faux avec la composition à gauche.

En pratique, on utilise souvent les fonctions équivalentes pour calculer des limites. On a en effet les résultats suivants :

Proposition 37

- $$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow f \backsim_{x_0} L \text{ où } L : x \longmapsto L$$
- $$\begin{cases} f \backsim_{x_0} g \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

3.2 Développements limités

Après avoir cherché à comparer deux fonctions au voisinage d'un point, on va s'intéresser à la comparaison entre une fonction f et un polynome au voisinage d'un point : on utilise pour ça la notion de développement limité.

Dfinition 38

► *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. On dit que f* ***admet un développement limité à l'ordre*** *n* ***en*** *x_0, ou au voisinage de x_0 si il existe un polynôme P_n de degré $\leqslant n$ et à coefficients réels et si il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 (excepté éventuellement en x_0) :*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

► *Soit $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ une borne de l'intervalle I. On dit que $f : I \to R$* ***admet un développement limité à l'ordre*** *n* ***en*** *$x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ si il existe un polynôme P_n de degré $\leqslant n$ et à coefficients réels et si il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 (excepté éventuellement en x_0) :*

$$f(x) = P_n(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque : Dans la suite on notera de façon abrégée $\mathrm{DL}_n(x_0)$ à la place de "développement limité à l'ordre n en x_0".

Remarque : On pourra toujours de ramener à un DL en 0 avec le changement de variable $y = x - x_0$ si $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $y = \frac{1}{x}$ si $x_0 = \pm\infty$.

Remarque : Dans certains livres, vous trouverez dans la définition

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

au lieu de $f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$. En effet, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^n \varepsilon(x)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ donc $(x - x_0)^n \varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$.

Théorème 39 (*unicité*)

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors il est unique, c'est à dire que le couple (P_n, ε) est unique.

Dans la suite, on notera $P_n = P_n(f)$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition et donne des conditions suffisantes à l'existence d'un DL.

Proposition 40

•*Si f admet un DL(x_0), alors f admet une limite finie en x_0 et :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = P_n(0).$$

Dans le cas où f est définie en x_0 et telle que $f(x_0) = P_n(0)$, cela traduit la continuité de f en x_0.

•*Si f admet un DL$_n(x_0)$ avec $n \geqslant 1$ et si f est continue en x_0, alors f est dérivable en x_0 et :*

$$f'(x_0) = P_n'(0).$$

Remarque : Attention, ceci ne se généralise pas aux dérivées à l'ordre supérieur ou égal à 2.

Démonstration : Si f admet un DL(x_0), alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (P_n(x-x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x)) = \lim_{x\to x_0} (P_n(x-x_0)) = P_n(0).$$

Si de plus f est définie en x_0 et $f(x_0) = P_n(0)$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En posant :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ on a } P_n(0) = a_0.$$

Donc,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k(x-x_0)^k}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k(x-x_0)^{k-1} \right) = a_1$$

d'où f dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1 = P_n'(0)$. ■

On va maintenant chercher une condition suffisante pour qu'une fonction admette un DL à l'ordre n.

Théorème 41 (*formule de Taylor-Young*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $n \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in I$. Alors f admet un DL$_n(x_0)$ et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Concernant les diverses opérations possibles sur les DL, on dispose de la proposition suivante.

Proposition 42

• *Troncature : Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors f admet un $DL_k(x_0)$ avec $k \in \{0, 1, ..., n\}$, et $P_k(f)$ est la troncature de $P_n(f)$ à l'ordre k.*

• *Somme et multiplication par une constante :*
Si f, g admettent un $DL_n(x_0)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f+g$ admet un $DL_n(x_0)$ avec $P_n(\lambda f+g) = \lambda P_n(f) + P_n(g)$.

• *Produit :*
Si f, g admettent un $DL_n(x_0)$, alors fg admet un $DL_n(x_0)$, $P_n(fg)$ s'obtenant par troncature de $P_n(f)P_n(g)$ à l'ordre n.

• *Composition : on se ramène à un DL en 0 par changement de variable*
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ admettent un $DL_n(0)$ et si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ et $Pn(f \circ g)$ s'obtient en tronquant $P_n(f) \circ P_n(g)$ au degré n.

• *Intégration :*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et admet un $DL_n(x_0)$ du type :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

alors, toute primitive F de sur I adment un $DL_{n+1}(x_0)$:

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} + (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x).$$

• *Dérivation :*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $n \geqslant 2$ fois dérivable en x_0 et admet un $DL_n(x_0)$ du type :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

alors f' admet un $DL_{n-1}(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k(x - x_0)^{k-1} + n(x - x_0)^{n-1}\varepsilon(x).$$

Attention : l'hypothèse f $n \geqslant 2$ fois dérivable en x_0 est nécessaire !

On notera également le résultat suivant qui peut être utile en pratique :

Proposition 43

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors :
- si f est paire, $P_n(f)$ est pair, c'est à dire qu'il n'a que des puissances paires,
- si f est impaire, $P_n(f)$ est impair, c'est à dire qu'il n'a que des puissances impaires.

On peut également se servir des développements limités pour trouver une fonction équivalente à une autre.

Proposition 44

Si f admet un $DL_n(x_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, alors f est équivalente en x_0 au premier terme non nul de son DL :

$$x_0 \in \mathbb{R} : f(x) = a_p(x-x_0)^p + ... + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \text{ avec } p \neq 0 \Longrightarrow f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$
$$x_0 \in \{-\infty, \infty\} : f(x) = \frac{a_p}{x^p} + ... \text{ avec } p \neq 0 \Longrightarrow f(x) \underset{x_0}{\sim} \frac{a_p}{x^p}$$

4 Intégration

4.1 Intégrales de Riemann

4.1.1 Définition et propriétés

Il existe plusieurs manières d'intégrer une fonction. L'intégration présentée dans ce cours est l'intégration de Riemann. Dans un premier temps, on définit l'intégrale d'une fonction en escalier, puis, par passage à la limite, on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

On introduit tout d'abord quelques objets utiles dans la suite.

Dfinition 45 (*subdivision*)

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé bornée de R.
On appelle ***subdivision de*** *$[a, b]$ toute famille finie $(x_i)_{i=1:n}$ avec $n \geqslant 1$ telle que :*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Le ***pas d'une subdivision*** *est la quantité : $\max_{i=1:n}(x_i - x_{i-1})$.*

Dfinition 46 (*fonction en escalier*)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une ***fonction en escalier*** *si il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i=1:n}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0 : n-1$. Dans ce cas, on dit que σ* ***est adaptée f.***

Dans la suite, on notera $\mathcal{E}(a, b)$ l'**ensemble des fonctions en escalier sur** $[a, b]$.

Dfinition 47 (*intégrale d'une fonction en escalier*)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (x_i)_{i=1:n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. On appelle ***intégrale de f sur*** *$[a, b]$ et on note $\int_a^b f(x)dx$ la quantité*

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i-1})f_i$$

où f_i est la valeur prise par f sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Remarque : La quantité $\int_a^b f(x)dx$ est indépendante de la subdivision σ.

Remarque : On notera souvent $\int_a^b f$ au lieu de $\int_a^b f(x)dx$.

On cherche maintenant à définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Dfinition 48 (*fonction continue par morceaux*)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une ***fonction continue par morceaux*** *si il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i=1:n}$ de $[a, b]$ telle que $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit continue pour tout $i = 0 : n - 1$.*

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on cherche à approcher la fonction par des fonctions en escalier pour lesquelles l'intégrale de Riemann a été définie précédemment.

Théorème 49

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g_ε et h_ε telles que :

$$g_\varepsilon \leqslant f \leqslant h_\varepsilon \text{ et } h_\varepsilon - g_\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

A partir de là, on peut définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en passant par un processus de limite.

Thorme-Dfinition 50 (*intégrale d'une fonction continue par morceaux*)

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe deux suites $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ de fonctions en escaliers telles que :

$$\forall x \in [a, b],\ |g_n(x) - f(x)| \leqslant h_n(x) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)dx = 0.$$

La suite $(\int_a^b g_n(x)dx)_n$ converge alors vers une limite indépendante des suites $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$. Cette limite, notée $\int_a^b f(x)dx$ est ***l'intégrale de la fonction f sur*** *$[a, b]$.*

L'intégrale de Riemann a les propriétés suivantes.

Proposition 51

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

- *Relation de Chasles : $\forall c, d, e \in [a, b]$,*

$$\int_c^d f + \int_d^e f = \int_c^e f,$$

- *linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b f,$$

- *positivité :*

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0,$$

- *croissance :*

$$f \geqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g.$$

- $$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$
- *Inégalité de Cauchy-Schwartz :*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

4.1.2 Primitives et calculs d'intégrales

La notion de primitive de fonction est importante et utile pour le calcul d'intégrales.

Dfinition 52 (*primitive*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$ sur I.

Proposition 53

Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 54

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.
La fonction

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x f(y)dy \end{array}$$

est dérivable sur $[a, b]$ et telle que $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$: c'est la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a.

Pour calculer une intégrale, on dispose des 3 théorèmes importants suivants.

Théorème 55

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $[a, b]$. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La quantité $F(b) - F(a)$ est également notée $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Théorème 56 (*Changement de variable*)

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $f : \varphi([a, b]) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

On a effectué le changement de variable : $x = \varphi(y)$.

Théorème 57 (*Intégration par partie*)

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

4.2 Intégrales généralisées

Jusqu'à présent, on a défini ce qu'était l'intégrale sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ d'une fonction continue par morceaux sur cet intervalle. On va maintenant chercher à donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ lorsque a ou $b \in \{-\infty, +\infty\}$ ou lorsque f n'est pas définie sur $[a, b]$ mais seulement sur $]a, b[$.

Dfinition 58 (*fonction localement intégrable*)

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$.

En pratique, on utilisera le résultat suivant :

$$f \text{ continue sur un intervalle } I \Longrightarrow f \text{ localement intégrable sur } I.$$

Dfinition 59 (*intégrale de f*)

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ localement intégrable avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit $F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(x)dx$.
*Si $l = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} F(x)$ existe et est finie, on dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(x)dx$ **converge** et on pose $\int_a^b f(x)dx = l$.*
*Dans le cas contraire, on dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(x)dx$ **diverge.***

Remarque : lorsque f est une fonction localement intégrable sur $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, on définit de même $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \int_x^b f(x)dx$ lorsque cette limite existe.

Afin de montrer qu'une intégrale généralisée converge ou diverge, on peut utiliser les propositions suivantes :

Proposition 60

- *Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b[$ et si $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et est finie, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.*
- *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ alors :*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$

• *Intégrales de Riemann :*
Soit $\alpha > 0$:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$
$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1.$$

• *Comparaison de fonctions positives*
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions positives localement intégrables sur* $[a, b[$ *telles que* $f \leqslant g$. *Alors :*

$$\int_a^b g(x)dx \text{ converge} \implies \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$
$$\int_a^b f(x)dx \text{ diverge} \implies \int_a^b g(x)dx \text{ diverge}$$

• *Equivalents :*
Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *localement intégrable sur* $[a, b[$ *et à valeurs positives. Soit* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *localement intégrable sur* $[a, b[$. *Alors :*

$$g = O_b(f) \text{ et } \int_a^b f(x)dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ converge}$$
$$f \underset{b}{\backsim} g \implies \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^b g(x) \text{ sont de même nature (convergentes ou divergentes)}$$

• *Règle d'Abel :*
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions positives localement intégrables sur* $[a, b[$ *telles que :*
(i) f *est décroissante et* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
(ii) il existe $M > 0$ *tel que* $\forall x \in [a, b[, \left|\int_a^x g(x)dx\right| \leqslant M$.
Alors $\int_a^b f(x)g(x)dx$ *converge.*

Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0.$$
2. Démontrer maintenant ces résultats en utilisant la définition (avec le ε) de la limite.

Exercice 2 Calculer les limites :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ 2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ 3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$ 5. $\lim_{x\to 0} \left(\ln(1+x^2)\sin(\dfrac{1}{1+x^2})\right)$

Exercice 3 Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
2. Supposons de plus que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on ait $|f'(x)| < 1$. Montrer alors que le réel x_0 est unique.

Exercice 4

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que la limite suivante existe et calculer sa valeur :
$$\lim_{x\to\infty} ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}).$$

Exercice 5 **Règle de l'Hospital**

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Soit $x_0 \in]a,b[$ et f ,$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en x_0 et dérivables sur $]a,b[\backslash\{x_0\}$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[\backslash\{x_0\}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
Montrer que :
$$\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l\right).$$

3. Application : calculer les limites en 0 de $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ $(n \geqslant 1)$; $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ et $\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

Fonctions usuelles

Exercice 6

1. Exprimer $\tan(a \pm b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$ (lorsque ces quantités existent).
2. Exprimer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$.
3. Trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{8})$ en vous aidant de la relation montrée en question 2.
4. De la même manière, trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{6})$.

Exercice 7

1. Donner l'expression de $\arctan(\tan(x))$ en fonction de x. Attention à bien considérer tous les cas !
2. A l'aide d'une des relations de l'exercice précédent, exprimer $\arctan x + \arctan y$ en fonction de x et de y.

Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1 Pas d'indication.

Exercice 2

1. Utiliser la définition de la dérivée d'une fonction.
2. Factoriser le numérateur
3. Multiplier dénominateur et numérateur par la quantité conjuguée.
4. Utiliser certaines limites connues comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.
5. Utiliser le théorème d'encadrement

Exercice 3

1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 4

Considérer la fonction $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}}$
Appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$.
Appliquer ensuite le théorème des gendarmes pour calculer la limite.

Exercice 5

1. Utiliser le théorème de Rolle.

Fonctions usuelles

Exercice 6

1. Développer et ne faire apparaître que des cos et des tan en utilisant la relation $\sin = \tan \times \cos$.

2. Utiliser les résultats de la question précédente.

3. Utiliser la relation de la question 2 avec $a = \frac{\pi}{8}$.

   Trouver les racines du polynôme $X^2 + 2X - 1$.

   Montrer que $\tan(\frac{\pi}{8})$ est racine du polynôme $X^2 + 2X - 1$.

Exercice 7

1. Utiliser le cercle trigonométrique.
2. Calculer d'abord $\tan(\arctan x + \arctan y)$

Equivalents, développement limités, intégration et intégrales généralisées

Exercice 1

Soit $F : x \longmapsto \int_1^x e^{\frac{1}{1+y}} dy$. On veut montrer que : $F \underset{+\infty}{\sim} x$.

Pour cela, on considère la fonction $f : y \longmapsto e^{\frac{1}{1+y}} - 1 - \frac{1}{y}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ et en déduire un équivalent de f quand y tend vers $+\infty$.
2. Montrer alors que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge.
3. Montrer ensuite que $F \underset{+\infty}{\sim} x$

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale suivante converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$$

   Trouver ensuite une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^3}$ et en déduire la valeur de l'intégrale.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y) dy.$$

   Calculer la valeur de I_n en fonction de n.
3. En utilisant le changement de variable $y = \sqrt{e^x - 1}$, calculer toutes les primitives de :

$$x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x - 1}}.$$

Exercice 3 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) \end{array}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f.

2. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
3. On admet alors que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. Calculer le développement limité à l'ordre 4 autour de 0 en utilisant le résultat de la question 1.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$.

Exercice 5

Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur un voisinage V de 0 et telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in V,\ f'(x) = \tan(x + f(x)) \\ f(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0.$$
2. Démontrer maintenant ces résultats en utilisant la définition (avec le ε) de la limite.

Correction

1. ▶ Montrons que $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$. Par définition, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln a}.$$
Or :
$$\lim_{x\to\infty} (x\ln a) = -\infty \text{ car } a \in]0,1[\text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$
donc, d'après la formule de la limite d'une fonction composée, on a :
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0.$$

▶Montrons que $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) = 0$
On a ici une forme indéterminée puisque $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}) = +\infty$ et $\lim_{x\to\infty}(-x) = -\infty$: on ne peut donc pas conclure directement sur le limite de la somme. Cependant, on a :
$$\sqrt{x^2-1}-x = (\sqrt{x^2-1}-x)\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \text{ avec } \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = +\infty$$
d'où, d'après la formule de la limite d'un quotient :
$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right) = 0.$$

2. ▶ On veut montrer que $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ c'est à dire que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon).$$
On se fixe un $\varepsilon > 0$ et on cherche $A(\varepsilon)$ tel que $(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon)$.
Supposons que l'on connaisse $A(\varepsilon)$ et considérons un $x \geqslant A(\varepsilon)$. On cherche alors à majorer $|a^x - 0|$ par une quantité qui dépend de $A(\varepsilon)$ et plus de x. On a :

$$x \ln a \leqslant A(\varepsilon) \ln a \text{ (puisque } a \in]0,1[),$$

d'où, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$|a^x - 0| = \left|e^{x \ln a}\right| = e^{x \ln a} \leqslant e^{A(\varepsilon) \ln a}.$$

$e^{A(\varepsilon) \ln a}$ est bien une quantité qui dépend de $A(\varepsilon)$ et plus de x. Si l'on choisit $A(\varepsilon)$ tel que

$$\varepsilon = e^{A(\varepsilon) \ln a},$$

on aura alors bien :

$$(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon).$$

Or :

$$\varepsilon = e^{A(\varepsilon) \ln a} \Longleftrightarrow \ln \varepsilon = A(\varepsilon) \ln a \Longleftrightarrow A(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \alpha}.$$

Conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \alpha} > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow (|a^x - 0| \leqslant \varepsilon).$$

On vient de montrer que $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$.

►On veut maintenant montrer que $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = 0$ c'est à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2 - 1} - x - 0\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

On se fixe un $\varepsilon > 0$ et on cherche $A(\varepsilon)$ tel que $(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right| \leqslant \varepsilon\right)$.
Supposons que l'on connaisse $A(\varepsilon)$ et considérons un $x \geqslant A(\varepsilon)$. On cherche alors à majorer $\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right|$ par une quantité qui dépend de $A(\varepsilon)$ et plus de x. Afin d'"enlever" la valeur absolue, cherchons dans un premier temps le signe de $\sqrt{x^2 - 1} - x$. On a, $\forall x \in]1, +\infty[$:

$$\begin{array}{rc} & 0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2 \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{x^2 - 1} \leqslant x \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{x^2 - 1} - x \leqslant 0, \end{array}$$

donc, $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right| = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Cherchons maintenant à majorer $x - \sqrt{x^2 - 1}$. Une première idée serait de faire la majoration suivante :

$$x - \sqrt{x^2 - 1} \leqslant x,$$

mais ensuite, on ne peut plus faire d'autre majoration : on n'a donc pas réussi à majorer par une quantité indépendante de x. On va donc faire une autre majoration. On a :

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - 1} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}},$$

Or, si l'on suppose que $A(\varepsilon) > 1$, on a :

$$x + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1} > 0$$

d'où :

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \leqslant \frac{1}{A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1}}.$$

$\frac{1}{A(\varepsilon)+\sqrt{A(\varepsilon)^2-1}}$ est bien une quantité indépendante de x et qui majore $\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right|$.
Si l'on choisit alors $A(\varepsilon)$ tel que

$$\varepsilon = \frac{1}{A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1}},$$

on aura alors bien :

$$(x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

Or :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \quad = \quad & \frac{1}{A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1}} \Longleftrightarrow A(\varepsilon) + \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1} = \frac{1}{\varepsilon} \\
\Longleftrightarrow \quad & \sqrt{A(\varepsilon)^2 - 1} = \frac{1}{\varepsilon} - A(\varepsilon) \Longrightarrow A(\varepsilon)^2 - 1 = (\frac{1}{\varepsilon} - A(\varepsilon))^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & A(\varepsilon)^2 - 1 = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2A(\varepsilon)}{\varepsilon} + A(\varepsilon)^2 \Longleftrightarrow \frac{2A(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & A(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Remarque : regardons si avec ce choix de $A(\varepsilon)$ l'hypothèse $A(\varepsilon) > 1$ est bien vérifiée :

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon) \quad > \quad & 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) > 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & 1 + \varepsilon^2 > 2\varepsilon \Longleftrightarrow \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 > 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & (\varepsilon - 1)^2 > 0 \text{ ce qui est toujours vrai.}
\end{aligned}$$

Donc $A(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) > 1$.
Conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x^2 - 1} - x\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 - 1} - x) = 0$.

Exercice 2 A SAVOIR FAIRE ABSOLUMENT !!!

Calculer les limites :

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \qquad 2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} \qquad 3.\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x} \qquad 5.\ \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2})\right)$$

Correction

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ =?
   Indication : utiliser la définition de la dérivée d'une fonction.
   On a une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Or :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}.$$

   Or la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0 et $\exp'=\exp$, d'où par définition :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\exp'(0)=e^0=1.$$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ =?
   Indication : factoriser le numérateur
   On a une forme indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$". Or :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1)=2.$$

3. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}$ =?
   Indication : multiplier dénominateur et numérateur par la quantité conjuguées.
   On a une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Or :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3} &= \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}\\ &= \frac{(x-2)}{(2x-4)}\frac{(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{x-1}+1)}\end{aligned}$$

   d'où

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{3}{2}.$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$ =?
   Indication : utiliser certaines limites connues comme $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$.

On a une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Or :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}2}{\frac{\tan 3x}{3x}3}$$

et comme $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$, on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}=\frac{2}{3}$$

5. $\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2})\right)=?$
   Indication : utiliser le théorème d'encadrement
   $\forall x\in\mathbb{R}$,
   $$-1\leqslant \sin(\frac{1}{1+x^2})\leqslant 1 \text{ et } \ln(1+x^2)\geqslant 0,$$
   d'où :
   $$-\ln(1+x^2)\leqslant \ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2})\leqslant \ln(1+x^2).$$
   Or $\lim_{x\to 0}(-\ln(1+x^2))=\lim_{x\to 0}\ln(1+x^2)=\ln(1)=0$ d'où, d'après le théorème d'encadrement :
   $$\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2})\right)=0.$$

Exercice 3 Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et telle que $f([0,1])\subset[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $x_0\in[0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.
2. Supposons de plus que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x\in]0,1[$, on ait $|f'(x)|<1$. Montrer alors que le réel x_0 est unique.

Correction :
Attention : modification à apporter sur le polycopié d'Analyse 1 page 5 !

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a,b\in I$. Alors pour tout γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\gamma$.*

1. On veut montrer qu'il existe au moins un réel $x_0\in[0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0(\Longleftrightarrow f(x_0)-x_0=0)$.
   On considère donc la fonction φ définie, pour tout $x\in[0,1]$ par :
   $$\varphi(x)=f(x)-x.$$
   Les fonctions f et $x\mapsto -x$ étant continues sur $[0,1]$, φ est elle même continue sur $[0,1]$. D'après le thorème des valeurs intermédiaires, pour tout γ compris entre $\varphi(0)$ et

$\varphi(1)$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = \gamma$.
Or on a :

$$\varphi(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0.$$

Et on a également $\varphi(1) = f(1) - 1$. Puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors on a $f(1) \subset [0,1]$ d'où

$$\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0.$$

Donc pour tout $\gamma \in [\varphi(1), \varphi(0)]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = \gamma$. Ceci est donc vrai pour $\gamma = 0$: il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. On a donc prouvé qu'il existe au moins un $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

2. Montrons maintenant que ce x_0 est unique dans le cas où f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$.
Si f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$ alors φ est dérivable sur $]0,1[$ (somme de deux fonctions continues sur $]0,1[$) et on a :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0,$$

c'est à dire, φ strictement décroissante sur $]0,1[$.
Raisonnons maintenant par l'absurde, c'est à dire que pour montrer que $A \Longrightarrow B$ on va montrer que non $B \Longrightarrow$ non A. Dans notre cas : $A =$"f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$" et $B =$ "x_0 est unique".
On suppose donc que x_0 n'est pas unique (c'est non B) et on veut montrer une contradiction avec l'hypothèse A. On considère donc x_1 et x_2 tels que $f(x1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$. On a alors : $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ ce qui n'est pas possible car si f est dérivable sur $]0,1[$ et telle que que pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| < 1$, alors φ est **strictement** décroissante.
Par conséquent, x_0 est unique.

Exercice 4

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que la limite suivante existe et calculer sa valeur :

$$\lim_{x \to \infty} ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}).$$

Correction :

On souhaite utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer la $\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{x})$. Ce théorème lorsqu'on l'applique à une fonction f, donne une expression de la quantité $f(b) - f(a)$ avec a et b tels que f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si on veut l'appliquer ici, il faut savoir sur quelle fonction f. On remarque alors que la quantité dont on veut calculer la limite est la différence entre $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$ et $xe^{\frac{1}{x}}$ ce qui nous amène à considérer la fonction $f : z \longmapsto ze^{\frac{1}{z}}$. On veut en fait calculer $\lim_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x))$.

Appliquons donc le théorème des accroissements finis à f entre x et $x+1$.
La fonction f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ car obtenue par composition, somme et

produit de fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, $\forall x \in]0,+\infty[$, f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, $\forall x \in]0,+\infty[$, $\exists y(x) \in]x, x+1[$ tel que :

$$f(x+1) - f(x) = f'(y(x))(x+1-x) = f'(y(x)).$$

Or, $f : z \longmapsto ze^{\frac{1}{z}}$ donc :

$$f'(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{-1}{z^2} ze^{\frac{1}{z}} = (1 - \frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}},$$

d'où, $\forall x \in]0,+\infty[$, $\exists y(x) \in]x, x+1[$ tel que :

$$f(x+1) - f(x) = (1 - \frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}}.$$

On a donc :

$$\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}},$$

et on cherche donc maintenant à calculer $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}}$. Pour cela, voici deux méthodes :

- *méthode 1 :*

$\forall x \in]0,+\infty[$,

$$x < y(x) < x + 1.$$

Or, $\lim_{x\to\infty}(x) = \lim_{x\to\infty}(x+1) = +\infty$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to\infty} y(x)$ existe et vaut $+\infty$.
De plus, $\lim_{y\to\infty}((1-\frac{1}{y})e^{\frac{1}{y}}) = 1$, donc d'après la formule de la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}} = 1.$$

- *méthode 2 :*

$\forall x \in]0,+\infty[$,

$$0 < x < y(x) < x + 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{y(x)} < \frac{1}{x},$$

d'où puisque l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\frac{1}{y(x)}} < e^{\frac{1}{x}}. \tag{1}$$

De plus, pour tout $x > 1$(pour avoir $0 < 1 - \frac{1}{x}$), on a :

$$0 < 1 - \frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{y(x)} < 1 - \frac{1}{x+1}, \tag{2}$$

d'où, en utilisant (1) et (2):

$$(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x+1}} < (1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}} < (1-\frac{1}{x+1})e^{\frac{1}{x}}.$$

Attention, le produit des inégalités est possible car tous les termes des inégalités sont positifs !

Comme on a :

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x+1})e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

d'après le théorème d'encadrement on montre que $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}}$ existe et vaut :

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{y(x)})e^{\frac{1}{y(x)}} = 1.$$

Conclusion : que ce soit avec la méthode 1 ou 2 on montre que $\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}})$ existe et vaut

$$\lim_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}) = 1.$$

Exercice 5 **Règle de l'Hospital**

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. Soit $x_0 \in]a,b[$ et f ,$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en x_0 et dérivables sur $]a,b[\backslash\{x_0\}$, g' ne s'annulant en aucun point de $]a,b[\backslash\{x_0\}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
   Montrer que :
   $$\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l\right).$$
3. Application : calculer les limites en 0 de $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ $(n \geqslant 1)$; $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ et $\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

Correction :

1. On cherche à montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$
   c'est à dire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
   $$(f(b)-f(a))\,g'(c) - (g(b)-g(a))\,f'(c) = 0. \quad (3)$$

Pour cela, on va utiliser le théorème de Rolle, qui lorsqu'on a une fonction h continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $h(a)=h(b)$, nous donne l'existence d'un point $c\in]a,b[$ tel que $h'(c)=0$. On voit ici que (3) s'écrit sous la forme :

$$h'(c)=0,$$

avec $h(x)=(f(b)-f(a))\,g(x)-(g(b)-g(a))\,f(x)$. On va donc essayer d'appliquer le théorème de Rolle à h. Comme f et g sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, h l'est également. De plus,

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b)-f(a))\,g(a)-(g(b)-g(a))\,f(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a),\\ h(b) &= (f(b)-f(a))\,g(b)-(g(b)-g(a))\,f(b)=-f(a)g(b)+g(a)f(b), \end{aligned}$$

donc $h(a)=h(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$h'(c)=0\Longleftrightarrow (f(b)-f(a))\,g'(c)-(g(b)-g(a))\,f'(c)=0.$$

2. $\forall x\in[x_0,b]$, f et g continues sur $[x_0,x]$ et dérivables sur $]x_0,x[$ et g' ne s'annule en aucun point de $]x_0,x[$. Donc d'après la question précédente, il existe $y(x)\in]x_0,x[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(y(x))}{g'(y(x))},$$

d'où :

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}\frac{f'(y(x))}{g'(y(x))}.$$

Or on a :

$$x_0<y(x)<x,$$

avec $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}x_0=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}x=x_0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}y(x)=x_0$. Par composition des limites, on a donc :

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}\frac{f'(y(x))}{g'(y(x))}=\lim_{y\overset{>}{\longrightarrow}x_0}\frac{f'(y)}{g'(y)}=l.$$

On procède de la même manière pour la limite à gauche (on utilise le résultat de la question précédente sur l'intervalle $[x,x_0]$), et on obtient :

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=l.$$

Par conséquent, on a :

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=l.$$

3. On a :
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)},$$
avec $x_0=0$, $f(x)=(1+x)^n$ et $g(x)=x$.
f et g sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et g' ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.
On a :
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\longrightarrow 0}\left[n(1+x)^{n-1}\right]=n.$$
Donc d'après la question précédente, on a :
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n.$$
De même on peut montrer que :
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}\text{ et }\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=3.$$

Fonctions usuelles

Exercice 6

1. Exprimer $\tan(a\pm b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$ (lorsque ces quantités existent).
2. Exprimer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$.
3. Trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{8})$ en vous aidant de la relation montrée en question 2.
4. De la même manière, trouver la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{6})$.

Correction

1. On a, $\forall a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a+b\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ (cas dans lesquels $\cos(a+b)=0$) :
$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$
avec
$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\ \text{et }\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b.\end{aligned}$$
En utilisant la relation $\sin(x)=\tan(x)\times\cos(x)$ (valable pour tout $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, la tangente n'étant pas définie sinon) on obtient alors :
$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\cos a\cos b(\tan a+\tan b)\\ \text{et }\cos(a+b)&=\cos a\cos b(1-\tan a\tan b),\end{aligned}$$

d'où, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a+b$, a, $b \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \tag{4}$$

De la même manière, on peut montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a-b$, a, $b \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \tag{5}$$

2. En utilisant la relation (4) avec $a = b$ ($2a$, $a \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$), on obtient :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}. \tag{6}$$

3. En écrivant la relation (6) pour $a = \frac{\pi}{8}$ (l'hypothèse $2a$, $a \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ est bien vérifiée), on obtient :

$$\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{8})}.$$

Or, $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ d'où

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1-\tan^2(\frac{\pi}{8})} \\ \Leftrightarrow \quad & \tan^2(\tfrac{\pi}{8}) + 2\tan(\tfrac{\pi}{8}) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$\tan(\frac{\pi}{8})$ est donc racine du polynôme $X^2 + 2X - 1$.Le discriminant du polynôme valant $\Delta = 8$, ses racines sont $\dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Comme.$\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on sait que $\tan(\frac{\pi}{8}) > 0$, donc (puisque $-1 - \sqrt{2} < 0$) :

$$\tan(\frac{\pi}{8}) = -1 + \sqrt{2} > 0.$$

4. En écrivant la relation (6) pour $a = \frac{\pi}{6}$(l'hypothèse $2a$, $a \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ est bien vérifiée), on obtient :

$$\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\tan(\frac{\pi}{6})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{6})}.$$

Or, $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \tfrac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1-\tan^2(\frac{\pi}{8})} \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{3}\tan^2(\tfrac{\pi}{8}) + 2\tan(\tfrac{\pi}{8}) - \sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

$\tan(\frac{\pi}{6})$ est donc racine du polynôme $\sqrt{3}X^2 + 2X - \sqrt{3}$.Le discriminant du polynôme valant $\Delta = 16$, ses racines sont $\dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Comme.$\frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on sait que $\tan(\frac{\pi}{6}) > 0$, donc (puisque $-\sqrt{3} < 0$) :

$$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Exercice 7 Enoncé modifié pour simplifier

1. Donner l'expression de $\arctan(\tan(x))$ en fonction de x pour $x \in [-\pi, \pi]$.
2. A l'aide d'une des relations de l'exercice précédent, exprimer $\arctan x + \arctan y$ en fonction de x et de y.

Correction :

1. Pour simplifier la question, on va se placer dans le cas où $x \in [-\pi, \pi]$. Dans ce cas, on a :
$$\arctan(\tan(x)) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x + \pi \text{ si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\\ x - \pi \text{ si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$
Pour s'en convaincre, utiliser le cercle trigonométrique et revenir à la définition de arctan.
2. Pour exprimer $x + \arctan y$ en fonction de x et de y, on va d'abord chercher l'expression de $\tan(\arctan x + \arctan y)$.
$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ \arctan x + \arctan y \in]-\pi, \pi[$ avec $\arctan x, \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc d'après (4) (voir exo précédent), $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, tels que $\arctan x + \arctan y \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :
$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)}.$$
Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(\arctan x) = x$, d'où :
$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x + y}{1 - xy}.$$
On veut maintenant appliquer arctan à cette relation. Pour cela, on utilise l'expression de $\arctan(\tan(x))$ demandée à la question 1. Par conséquent :
   - Si $\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(\arctan x + \arctan y)) = \arctan x + \arctan y$ et
   $$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right),$$
   - Si $\arctan x + \arctan y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(\arctan x + \arctan y)) = \arctan x + \arctan y + \pi$ et
   $$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) - \pi,$$
   - Si $\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\arctan(\tan(\arctan x + \arctan y)) = \arctan x + \arctan y - \pi$ et
   $$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + \pi.$$
   Ramenons à présent les conditions sur $\arctan x + \arctan y$ sur x et y.

– Quelles sont les conditions sur x et sur y pour que l'on ait $\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?
Rappelons que

$$\alpha[2\pi] \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\iff \cos(\alpha) > 0.$$

Donc

$$\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\iff \cos(\arctan x + \arctan y) > 0.$$

Or $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos a \cos b(1 - \tan a \tan b)$. D'où

$$\begin{aligned} \cos(\arctan x + \arctan y) &= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)) \\ &= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - xy). \end{aligned}$$

Or $\arctan x$, $\arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan x) > 0$, $\cos(\arctan y) > 0$ et donc :

$$\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\iff 1 - xy > 0 \iff 1 > xy.$$

– Quelles sont les conditions sur x et sur y pour que l'on ait $\arctan x + \arctan y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$?
Rappelons que

$$\alpha[2\pi] \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\iff \cos(\alpha) < 0 \text{ et } \sin(\alpha) < 0.$$

Donc

$$\arctan x + \arctan y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\iff \begin{cases} \cos(\arctan x + \arctan y) < 0 \\ \sin(\arctan x + \arctan y) < 0 \end{cases}.$$

Or $\cos(a+b) = \cos a \cos b(1 - \tan a \tan b)$ et $\sin(a+b) = \cos a \cos b(\tan a + \tan b)$. D'où

$$\begin{aligned} \cos(\arctan x + \arctan y) &= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - xy) \\ \text{et } \sin(\arctan x + \arctan y) &= \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(x + y) \end{aligned}$$

Or $\cos(\arctan x) > 0$, $\cos(\arctan y) > 0$, donc :

$$\arctan x + \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\iff \begin{cases} 1 - xy < 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x, y < 0 \\ 1 - xy < 0 \end{cases}.$$

– Quelles sont les conditions sur x et sur y pour que l'on ait $\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$?
Rappelons que

$$\alpha[2\pi] \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \iff \cos(\alpha) < 0 \text{ et } \sin(\alpha) > 0.$$

Donc

$$\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos(\arctan x + \arctan y) < 0 \\ \sin(\arctan x + \arctan y) > 0 \end{array} \right. .$$

Or $\cos(\arctan x + \arctan y) = \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(1 - xy)$ et $\sin(\arctan x + \arctan y) = \cos(\arctan x)\cos(\arctan y)(x+y)$. Comme $\cos(\arctan x) > 0$, $\cos(\arctan y) > 0$, on a finalement :

$$\arctan x + \arctan y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 - xy < 0 \\ x + y > 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x, y > 0 \\ 1 - xy < 0 \end{array} \right. .$$

Conclusion :

$$\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + c\pi$$

avec

$$c = \left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ si } x, y < 0 \text{ et } 1 - xy < 0 \\ 0 \text{ si } 1 > xy \\ 1 \text{ si } x, y > 0 \text{ et } 1 - xy < 0. \end{array} \right.$$

Equivalents, développement limités, intégration et intégrales généralisées

Exercice 1

Soit $F : x \longmapsto \int_1^x e^{\frac{1}{1+y}} dy$. On veut montrer que : $F \underset{+\infty}{\sim} x$.

Pour cela, on considère la fonction $f : y \longmapsto e^{\frac{1}{1+y}} - 1 - \frac{1}{y}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ et en déduire un équivalent de f quand y tend vers $+\infty$.
2. Montrer alors que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge.
3. Montrer ensuite que $F \underset{+\infty}{\sim} x$

Correction :

1. On cherche le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$. On connait le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ qui est :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

et on connait le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto e^x$ qui est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Ici on cherche le $DL(0)$ de $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ à l'ordre 3, donc on va développer les DL précédents à l'ordre 3. Attention cependant, ce n'est pas toujours le cas ! par exemple, si on veut trouver le de $x \longmapsto \frac{e^x-1}{x}$ à l'ordre 3, il faudra développer le DL de $x \longmapsto e^x$ à l'ordre 4 puisque celui-ci sera ensuite divisé par x. Faites le calcul pour vous en convaincre...

Revenons donc maintenant au $DL_3(0)$ de $x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$. On a, à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

d'où

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

Comme la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ vaut 0 pour $x = 0$, on peut utiliser le résultat sur le DL d'une fonction composée et puisque :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

on a :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{1+x}} &= 1 \\ &\quad +(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4)) \\ &\quad +\frac{1}{2}(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^2 \\ &\quad +\frac{1}{3!}(x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^3 \\ &\quad +o((x-x^2+x^3-x^4+o(x^4))^3), \end{aligned}$$

soit après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 3 :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{1+x}} &= 1 \\ &\quad +x-x^2+x^3 \\ &\quad +\frac{1}{2}(x^2-2x^3) \\ &\quad +\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \\ &= 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

On cherche maintenant un équivalent de f quand y tend vers $+\infty$.
On a :

$$\begin{aligned} f(y) &= e^{\frac{1}{1+y}}-1-\frac{1}{y} \\ &= g(\frac{1}{y})-1-\frac{1}{y} \end{aligned}$$

avec $g : x \longmapsto e^{\frac{x}{1+x}}$ (en effet : $g(\frac{1}{y}) = e^{\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}} = e^{\frac{1}{1+y}}$).
Pour obtenir un DL de f à partir de celui de g il faut donc effectuer le changement de variable $x = \frac{1}{y}$ dans le DL de g. Attention à bien regarder quand même qu'avec ce changement de variable, si x est au voisinage de 0 alors y est au voisinage de $+\infty$. Le DL de f que l'on obtiendra alors après changement de variable $x = \frac{1}{y}$ dans le DL au voisinage de 0 de g sera donc un DL au voisinage de $+\infty$. On a donc, au voisiange de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(y) &= 1+\frac{1}{y}-\frac{1}{2}(\frac{1}{y})^2+\frac{1}{6}(\frac{1}{y})^3+o((\frac{1}{y})^3)-1-\frac{1}{y} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{y^3}+o(\frac{1}{y^3}). \end{aligned}$$

Un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ est alors donné par le permier terme non nul de son $DL(+\infty)$:

$$f \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2y^2}.$$

2. Montrons maintenant que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge.
On a :
$$f \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2y^2} \Longleftrightarrow -f \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2y^2}.$$
Les fonctions -f et $y \longmapsto \frac{1}{2y^2}$ sont toutes deux continues sur $[1, +\infty[$ car elles sont obtenues par composition, somme et produit de fonctions usuelles continues. Ces deux fonctions sont donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus $\forall y \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{2y^2} \geqslant 0$, donc on peut utiliser le résultat sur les intégrales généralisées de deux fonctions équivalentes :
$$-\int_1^{+\infty} f(y)dy \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{2y^2}dy \text{ sont de même nature.}$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2y^2}dy$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$, donc $-\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge, ce qui implique que $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ converge également.
3. On souhaite maintenant montrer que $F \underset{+\infty}{\sim} x$ où $F : x \longmapsto \int_1^x e^{\frac{1}{1+y}}dy$.
Par définition, $F \underset{+\infty}{\sim} x \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$.
On a :
$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{x} &= \frac{\int_1^x e^{\frac{1}{1+y}}dy}{x} = \frac{\int_1^x (f(y) + 1 + \frac{1}{y})dy}{x} \\ &= \frac{\int_1^x (f(y))dy}{x} + \frac{\int_1^x (1 + \frac{1}{y})dy}{x}. \end{aligned}$$
Or $\int_1^x (1 + \frac{1}{y})dy = [y + \ln|y|]_1^x = x + \ln|x| - 1 - \ln|1| = x + \ln|x| - 1$ d'où
$$\frac{F(x)}{x} = \frac{\int_1^x (f(y))dy}{x} + \frac{x + \ln|x| - 1}{x} = \frac{\int_1^x (f(y))dy}{x} + 1 + \frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x}.$$
On a $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\frac{\ln|x|}{x}) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\frac{1}{x}) = 0$. De plus on a montré que $\int_1^{\infty} (f(y))dy$ est convergente : notons donc $l \in \mathbb{R}$ sa valeur. On a :
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{\int_1^x (f(y))dy}{x}) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{l}{x}) = 0.$$
D'où
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1 \Longleftrightarrow F \underset{+\infty}{\sim} x.$$

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale suivante converge.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^3}dx.$$
Trouver ensuite une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^3}$ et en déduire la valeur de l'intégrale.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y)dy.$$
Calculer la valeur de I_n en fonction de n.
3. En utilisant le changement de variable $y = \sqrt{e^x - 1}$, calculer toutes les primitives de :
$$x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}.$$

Correction :

1. Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ converge.
On a, $\forall x \in]0, +\infty[$:
$$0 \leqslant x^3 \leqslant x^3 + 1 \Longrightarrow \frac{1}{x^3} \geqslant \frac{1}{x^3+1} \geqslant 0.$$
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ est localement intégrable sur $]0, +\infty[$ mais pas en 0. Donc on ne va pas pouvoir conclure directement sur l'intégrale entre 0 et $+\infty$. On va donc séparer l'intégrale en deux morceaux :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx.$$
La borne 1 a ici été choisie de manière arbitraire.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$ est localement intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx$ est convergente.
On s'intéresse maintenant à $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$. On a toujours, $\forall x \in [1, +\infty[$,
$$\frac{1}{x^3} \geqslant \frac{1}{x^3+1} > 0.$$
Les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ sont localement intégrables sur $[1, +\infty[$ car continues sur $[1, +\infty[$, donc si $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ converge alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ converge. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ est un intégrale de Riemann avec $\alpha = 3$ donc elle converge. Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ converge.
Cherchons à présent les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^3}$.
On admettra ici(décomposition en éléments simples) que :
$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\frac{2-x}{1-x+x^2}.$$
Une primitive de $\frac{1}{1+x}$ est $\ln|1+x|$.
On va ensuite essayer de décomposer le deuxième terme $\frac{2-x}{1-x+x^2}$ en la somme d'un terme

de la forme $c\frac{2x-1}{1-x+x^2} = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-x+x^2$ et d'un terme de la forme $\frac{c}{1-x+x^2}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{2-x}{1-x+x^2} &= \frac{-\frac{1}{2}(2x-4)}{1-x+x^2} = \frac{-\frac{1}{2}(2x-1-3)}{1-x+x^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2x-1}{1-x+x^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-x+x^2}.\end{aligned}$$

Le terme $\frac{2x-1}{1-x+x^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-x+x^2$. Une primitive de $\frac{2x-1}{1-x+x^2}$ est donc $\ln|u(x)| = \ln|1-x+x^2|$.
Pour le dernier terme $\frac{1}{1-x+x^2}$, on doit le mettre sous la forme $c\frac{\sqrt{k}}{1+k(x+a)^2}$ qui a pour primitive $\arctan(\sqrt{k}(x+a))$. On a :

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1}.$$

Une primitive de $\frac{1}{1-x+x^2}$ est donc $\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2}))$.

Au final, une primitive de $\frac{1}{1+x^3}$ est donnée par $\frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln|1-x+x^2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2}))$.
Cherchons maintenant la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$.
On a :

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx \\ =\ &\lim_{y\longrightarrow\infty}\int_0^y\frac{1}{1+x^3}dx = \lim_{y\longrightarrow\infty}\left(\left[\frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^2\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2}))\right]_0^y\right) \\ =\ &\lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{3}\ln|1+y| - \frac{1}{6}\ln\left|1-y+y^2\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(y-\frac{1}{2})) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\sqrt{\frac{1}{3}})\right] \\ =\ &\lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(y-\frac{1}{2})) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\sqrt{\frac{1}{3}})\right].\end{aligned}$$

Or $\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{y^2}{y^2} = 1$ d'où $\lim_{y\longrightarrow\infty}\ln\left|\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2}\right| = \ln(1) = 0$. De plus, $\lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{\frac{4}{3}}(y-\frac{1}{2}))\right] = \lim_{y\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(y)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(y)\sin^{n-1}(y)dy.$$

On pose $u : y \longmapsto \sin^{n-1}(y)$ et $v' : y \longmapsto \sin(y)$. u est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $u'(y) = (n-1)\cos(y)\sin^{n-2}(y)$. Une primitive de v' est $v : y \longmapsto -\cos(y)$. Les fonctions u et v sont de classe C^1, donc on peut faire une intégration par parties. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\sin^{n-1}(y)dy = [-\cos(y)\sin^{n-1}(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)(n-1)\cos(y)\sin^{n-2}(y)dy \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\sin^{n-2}(y)dy = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(y))\sin^{n-2}(y)dy \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(y)dy - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y)dy = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\ \iff I_n &= \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

On considère alors deux cas :
- si n est pair : $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{(2k-1)}{2k} I_{2k-2} = \frac{(2k-1)}{2k}\frac{(2k-3)}{(2k-2)} I_{2k-4} = \frac{(2k-1)}{2k}\frac{(2k-3)}{(2k-2)}\frac{(2k-5)}{(2k-4)} I_{2k-6} \\ &= ... = \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\times ... \times 1}{2k(2k-2)(2k-4)\times ... \times 2} I_0. \end{aligned}$$

Or

$$(2k-1)(2k-3)(2k-5)\times ...\times 1 = \frac{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)(2k-5)\times ... \times 1}{2k(2k-2)(2k-4)\times ... \times 2} = \frac{(2k)!}{2^k(k!)},$$

d'où

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} I_0.$$

Comme on a :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dy = \frac{\pi}{2},$$

on obtient :

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

- si n est pair : $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. De la même manière que pour n pair, on montre que :

$$I_{2k+1} = \frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!} I_1,$$

avec

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)dy = 1,$$

d'où

$$I_{2k+1} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

3. Une primitive de $f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}$ est la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx.$$

On effectue le changement de variables $y = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \sqrt{e^x-1}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} y & = & \varphi(x) \Longleftrightarrow y = \sqrt{e^x-1} \Longleftrightarrow y^2 = e^x - 1 \\ & \Longleftrightarrow & y^2 + 1 = e^x \Longleftrightarrow \ln(y^2+1) = x. \end{array}$$

On a également $dy = \varphi'(x)dx$ avec $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$, d'où

$$dx = \frac{dy}{\varphi'(x)} = \frac{dy}{\varphi'(\ln(y^2+1))} = \frac{dy}{\frac{1}{2}\frac{y^2+1}{y}} = \frac{2ydy}{y^2+1}.$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} F(t) & = & \displaystyle\int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{y^2+1}{(y^2+2)y}\frac{2ydy}{y^2+1} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{2}{(y^2+2)}dy \\ & = & \displaystyle\left[\sqrt{2}\arctan(\frac{y}{\sqrt{2}})\right]_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} = \sqrt{2}\arctan(\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}\arctan(\frac{\varphi(0)}{\sqrt{2}}) \\ & = & \displaystyle\sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}}). \end{array}$$

Les primitives de f s'écrivent toutes $\sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}}) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) \end{array}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f.
2. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
3. On admet alors que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. Calculer le développement limité à l'ordre 4 autour de 0 en utilisant le résultat de la question 1.

Correction :

1. On cherche le $DL_4(0)$ de f.
   Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).
\end{aligned}$$

   Donc, au voisinage de 0, on peut trouver le DL du produit de $\frac{1}{1+x}$ par $\ln(1+x)$. On a :

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)).$$

   Après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4, on obtient alors :

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4).$$

   Comme on a $\frac{\ln(1+0)}{1+0} = 0$, on peut faire la composition entre le DL de $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et celui de arctan au voisinage de 0. On a :

$$\begin{aligned}
\arctan(\frac{\ln(1+x)}{1+x}) &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)\\
&\quad - \frac{(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4))^3}{3} + o(x^4)\\
&= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)\\
&\quad - \frac{(x^3 - \frac{9}{4}x^4)}{3} + o(x^4)\\
&= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

2. La fonction f est continue et dérivable sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ car obtenue par composition, somme et produit de fonctions continues et dérivables. On a :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2 + (\ln(1+x))^2}.$$

   $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, on a :

$$\frac{3}{4} \leqslant 1 + x \leqslant \frac{5}{4} \Longrightarrow \ln(\frac{3}{4}) \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(\frac{5}{4}) < 1,$$

d'où $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$,

$$1 - \ln(1+x) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0.$$

Par conséquent, f est strictement croissante et continue sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$: elle est donc bijective de $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ dans $f([-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}])$ et admet une réciproque f^{-1} sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

3. On admet que f^{-1} admet un Dl à l'ordre 4 au voisinage de 0. On note :

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4).$$

On a de plus :

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4),$$

et on sait par définition que, $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$,

$$f^{-1} \circ f(x) = x.$$

On a donc, $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$:

$$\begin{array}{ll} & f^{-1} \circ f(x) = x \\ \Longleftrightarrow & a_0 + a_1 f(x) + a_2 (f(x))^2 + a_3 (f(x))^3 + a_4 (f(x))^4 + o((f(x))^4) = x \\ \Longleftrightarrow & a_0 \\ & +a_1(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4) \\ & +a_2(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4)^2 \\ & +a_3(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4)^3 \\ & +a_4(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4)^4 + o(x^4) = x. \end{array}$$

Après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4, on a :

$$a_0 + a_1 x + (-\frac{3}{2}a_1 + a_2)x^2 + x^3(\frac{3}{2}a_1 - 3a_2 + a_3) + x^4(-\frac{7}{12}a_1 + \frac{21}{4}a_2 - \frac{9}{2}a_3 + a_4) + o(x^4) = x.$$

En identifiant membre à membre les coefficients du polynome, on a :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ -\frac{3}{2}a_1 + a_2 = 0 \\ \frac{3}{2}a_1 - 3a_2 + a_3 = 0 \\ -\frac{7}{12}a_1 + \frac{21}{4}a_2 - \frac{9}{2}a_3 + a_4 = 0, \end{cases}$$

d'où, après résolution du système :

$$a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = 3;\ a_4 = \frac{149}{24}.$$

On a donc :

$$f^{-1}(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + \frac{149}{24}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 4 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{array} \right. \end{array}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$.

Correction :

1. On cherche le $DL_4(0)$ de f. $\forall x \in]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$, on a :

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x - x}{x \sin x}.$$

On remarque que $f(-x)=\frac{-\sin x+x}{x\sin x}=-f(x)$ donc f est impaire. Par conséquent, le DL de f n'aura que des puissances impaires de x.
Au voisinage de 0 on a :

$$\begin{array}{rcl} \sin x & = & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n), \\ \dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+...+x^n+o(x^n). \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{\sin x - x}{x \sin x}=\dfrac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{x(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6))} \\ & = & \dfrac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{x^2(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5))}=\dfrac{-\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}+o(x^4)}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}. \end{array}$$

Or, on a :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}=\frac{1}{1-u(x)}$$

avec $u(x)=\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}-o(x^5)$ tel que $u(0)=0$. On peut donc trouver le DL de $\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}$ par composition avec celui de $\frac{1}{1-x}$. On a :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}=1+(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!})+(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!})^2+o(x^4),$$

ce qui donne, après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4 :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^5)}=1+\frac{x^2}{6}+(\frac{1}{36}-\frac{1}{120})x^4+o(x^4).$$

On a alors :

$$f(x) = \left(-\frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + (\frac{1}{36} - \frac{1}{120})x^4 + o(x^4)\right).$$

Après développement et en ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 4, on obtient :

$$f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{7x^3}{360} + o(x^4). \tag{1}$$

Remarque : Attention, ici on est obligé de considérer le DL de sin à l'ordre 6 pour trouver ensuite celui de f à l'ordre 4!

2. Le DL de f est valable au voisinage de 0, excepté éventuellement en 0. De (1), on déduit :

$$f \underset{0}{\sim} -\frac{x}{6},$$

d'où

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{x}{6} = 0.$$

Or, par définition de f on a $f(0) = 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.
On a alors au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{-\frac{x}{6} - \frac{7x^3}{360} + o(x^4)}{x} = -\frac{1}{6} - \frac{7x^2}{360} + o(x^3),$$

d'où :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}.$$

On a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0}(-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{6}$: f est donc dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut $-\frac{1}{6}$.

3. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$. La fonction $x \longmapsto \sin x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$. Par conséquent, $x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$ est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$ et f également.
Il reste donc à montrer que f est de classe C^1 en 0. Dans la question précédente, on a montré que f est continue et dérivable en 0. Il reste donc à montrer que f' est continue en 0.
$\forall x \in]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x + x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Or on a : $\sin x \underset{0}{\sim} x$ d'où, $x^2 \sin^2 x \underset{0}{\sim} x^4$. On cherche maintenant un équivalent de $-\sin^2 x + x^2 \cos x$ en 0. Attention, il est interdit d'additionner des équivalents : on va

donc passer par les DL. On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

d'où :

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

et :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

d'où

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} + o(x^6).$$

On a donc :

$$x^2 \cos x - \sin^2 x = -\frac{x^4}{6} + o(x^4),$$

d'où

$$x^2 \cos x - \sin^2 x \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{6}.$$

Finalement, on a :

$$\frac{-\sin^2 x + x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^4}{6}}{x^4} = \frac{-1}{6}.$$

On a donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x) = \frac{-1}{6} = f'(0)$: f' est continue en 0.

Exercice 5

Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur un voisinage V de 0 et telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in V,\ f'(x) = \tan(x + f(x)) \\ f(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Correction :

Par définition, f dérivable au voisinage de 0 et on a, $\forall x \in V$:

$$f'(x) = \tan(x + f(x)).$$

Comme f et la fonction tan sont dérivable au voisinage de 0, la fonction f' est aussi dérivable au voisinage de 0 et on a :

$$f''(x) = (1+f'(x))(1+\tan^2(x+f(x))) = (1+f'(x))(1+(f'(x))^2) = 1+f'(x)+(f'(x))^2+(f'(x))^3.$$

Comme f' est dérivable au voisinage de 0, f'' l'est aussi et on a :

$$f'''(x) = f''(x)(1 + 2f'(x) + 3(f'(x))^2).$$

Comme f' et f'' sont dérivables au voisinage de 0, f''' l'est aussi et on a :

$$f''''(x) = f'''(x)(1 + 2f'(x) + 3(f'(x))^2) + f''(x)(2f''(x) + 6f''(x)f'(x)).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{\pi}{4} \\
f'(0) &= \tan(0 + f(0)) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \\
f''(0) &= 1 + f'(0) + (f'(0))^2 + (f'(0))^3 = 4 \\
f'''(0) &= f''(0)(1 + 2f'(0) + 3(f'(0))^2) = 24 \\
f''''(0) &= f'''(0)(1 + 2f'(0) + 3(f'(0))^2) + f''(0)(2f''(0) + 6f''(0)f'(0)) = 272.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Taylor Young, on a donc au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x + \frac{f'''(0)}{3!}x + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + o(x^4) \\
&= \frac{\pi}{4} + x + 2x + 4x + \frac{34}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Développement limités et équivalents

Exercice 1 En utilisant les DL usuels du formulaire, donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes (l'ordre du DL étant donné entre parenthèses) :

1.	$\frac{\sin(x)}{x}$	(3)	4.	$e^{\sin x}$	(3)
2.	$2(\sin(x)+\sinh(x))$	(4)	5.	$e^{\cos x}$	(3)
3.	$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$	(4)	6.	$\cotan(x)$	(5)

Exercice 2

1. En utilisant la formule de Taylor Young, calculer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
2. Calculer la dérivée de f. Puis donner l'ensemble des primitives de f.
3. Déduire de la question 1. et 2. le DL à l'ordre 3 des fonctions g et h définies par :
$$g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ et } h(x) = \arctan x.$$

Exercice 3 Développement limité au voisinage de $+\infty$

1. On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \ln(\frac{x+1}{x}),$$
et on souhaite calculer son DL à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on pose le changement de variable $y = \frac{1}{x}$. Ainsi, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, y est au voisinage de 0 : on se ramène donc à un calcul de DL au voisinage de 0.
On procède alors en trois étapes :
Donner l'expression $f(\frac{1}{y})$ en fonction de y.
Calculer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $y \longmapsto f(\frac{1}{y})$.
Puis, en déduire le DL au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3 de f
2. De la même manière, calculer le DL au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 5 de $f : x \longmapsto f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$.

Exercice 4 Développement limité au voisinage de a

1. On souhaite calculer le DL au voisinage de $a = \frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4 de $x \longmapsto \sin(x)$.
   Pour cela, on pose le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{2}$. Ainsi, lorsque x est au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, y est au voisinage de 0 : n se ramène donc à un calcul de DL au voisinage de 0.
   On procède alors en trois étapes :
   Donner l'expression $f(y + \frac{\pi}{2})$ en fonction de y.
   Calculer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 4 de $y \longmapsto f(y + \frac{\pi}{2})$.
   Puis, en déduire le DL au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4 de f.
2. De la même manière, calculer le DL au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 4 de $f : x \longmapsto f(x) = (\cos(2x))^2$.

Exercice 5 En utilisant les DL (à vous de voir quel est l'ordre le plus judicieux), donnez un équivalent en 0 des fonctions suivantes :

$$(\frac{1}{1-x} - e^{\frac{\sin(x)}{x}})\frac{1}{x^2},$$

et en déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } \lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-x} - e^x)\frac{1}{x^2}.$$

Intégrales

Exercice 6 Fractions rationnelles

Calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$$
2. $$\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+3}dx$$
3. Montrer que :
   $$\frac{x^3-2}{x^3-x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}$$
   Remarque : ce résultat est obtenu par décomposition en éléments simples.
   En déduire la valeur de l'intégrale suivante :
   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx$$

4. Montrer que :

$$\frac{x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

En vous aidant du résultat trouvé à la question 1., calculer :

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes par changement de variable (le changement de variable étant indiqué entre parenthèses) :

1.
$$\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2t+1}}dt \quad (u = \sqrt{2t+1})$$

2.
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \quad (t = \sinh u)$$

3.
$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{3+\sin(2x)}dx \quad (\sin x + \cos x = t)$$

Exercice 8

Par intégration par parties (une ou plusieurs intégrations par parties peuvent être nécessaires selon le cas), calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\ln x$, 2. $\arctan x$, 3. $\arcsin x$, 4. $(x^2+x+1)e^{2x}$, 5. $x\sin x$.

Rappel : calculer les primitives d'une fonction f revient à calculer l'intégrale $\int_0^x f(t)dt + K, K \in \mathbb{R}$

Intégrales généralisées

Exercice 9

Donner la nature (intégrale convergente ou non convergente), sans calculer l'intégrale, des intégrales généralisées suivantes :

$$1.\ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}, \qquad 2.\ \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Développement limités et équivalents

Ne pas oublier de toujours vérifier que la fonction admet un DL avant de le calculer!!!

Exercice 1

1. Utiliser le DL au voisinage de 0 de $\sin(x)$ et le pousser à l'ordre 4.
2. Somme de 2 DL usuels : rien de compliqué.
3. Multiplication de 2 DL usuels : celui de $\ln(1+x)$ et celui de $\frac{1}{1+x}$
4. Composition de 2 DL : pas de problème car $\sin(0) = 0$
5. Composition de 2 DL : faire attention ici car $\cos(0) \neq 0$! Il faut donc séparer la partie du DL du $\cos(x)$ qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.
6. Division et composition de 2 DL : faire apparaitre au dénominateur une quantité de la forme $1 + u(x)$ avec $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et utiliser le DL au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+x}$ (même méthode utilisée en cours dans un exemple).

Exercice 2

1. Utiliser le DL au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+x}$
2. Rien de compliqué!
3. Dérivation et intégration d'un DL (voir cours).

Exercice 3

1. Tout est expliqué!
2. Faire comme pour la question 1.

Exercice 4

1. Tout est expliqué!
2. Faire comme pour la question 1.

Exercice 5 Un équivalent est donné par le premier terme non nul du développement limité.
Si f et g sont équivalentes en x_0, et que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Intégrales

Exercice 6

1. Exprimer le dénominateur x^2+x+1 comme une quantité de la forme : $k(1+(\frac{x+b}{a})^2)$, a, b, k étant à déterminer.
   On a alors :
   $$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{k(1+(\frac{x+b}{a})^2)}$$
   et la primitive de $\dfrac{1}{1+(\frac{x+b}{a})^2}$ est $a\arctan(\frac{x+b}{a})$.
2. On pose $u(x) = x^2+x+3$. Exprimer le numérateur $3x+2$ comme une quantité de la forme $ku'(x)+c$, k et c étant à déterminer.
   On a alors :
   $$\frac{3x+2}{x^2+x+3} = \frac{ku'(x)}{u(x)} + \frac{c}{x^2+x+3}.$$
   Pour le premier terme, on utilise le fait qu'une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)|$ et pour le second terme, on fait comme pour la question 1.
3. Utilisation de primitives usuelles.
4. Utilisation de primitives usuelles et de la réponse à la question 1.

Exercice 7

Pas d'indication particulière. Vérifier cependant bien avant de faire le calcul que ces intégrales ne sont pas impropres (généralisées).

Exercice 8

Pour la fonction 4. plusieurs intégrations par parties sont nécessaires.

Intégrales généralisées

Exercice 9

1. Utiliser un équivalent de la fonction en $+\infty$.
2. Utiliser une majoration de la fonction.
3. Utiliser la continuité de la fonction en 0.

Développement limités et équivalents

Exercice 1

1. $$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

2. $$2(\sin(x) + \sinh(x)) = 4x + o(x^4)$$

3. $$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$$

4. $$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

5. Attention dans ce cas ! On a :

   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ et $e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2!} + \frac{u(x)^3}{3!} + o(u(x)^3)$ pour u telle que $u(0) = 0$,

   or $\cos(0) \neq 0$ donc on ne peut pas prendre $u = \cos$. On note donc $u = \cos(x) - \cos(0) = \cos x - 1$. On a bien $u(0) = 0$ et donc :

   $$e^{\cos x - 1} = 1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3),$$

   d'où :

   $$e^{\cos x} = e \times e^{\cos x - 1} = e(1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3)).$$

   En utilisant le DL de $\cos x$ au voisinage de 0, on obtient alors :

   $$e^{\cos x} = e(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)).$$

6. $\cot\tan x$ n'admet pas de DL en 0 car cette fonction n'admet pas de limite finie en 0 (ce qui est une condition nécessaire à l'existence d'un DL).

Exercice 2

1. Pour utiliser la formule de Taylor Young et obtenir le DL à l'ordre 4, on calcule $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ et $f''''(0)$, et on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

2.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -g(x)$$

Toute primitive de f est de la forme :

$$\arctan x + k = h(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

3. Pour obtenir le DL de g et de h on dérive et on intègre le DL de f puisque g et h sont (à un signe près pour g) la dérivée et une primitive de f. On obtient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2x - 4x^3 + o(x^3) \\ h(x) &= \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \end{aligned}$$

Exercice 3 Développement limité au voisinage de $+\infty$

1. On a :

$$f(x) = f(\frac{1}{y}) = \ln(1+y).$$

Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, y est au voisinage de 0. On utilise donc le DL de $\ln(1+y)$ au voisinage de 0 :

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

et en repassant à la variable $x = \frac{1}{y}$, on obtient le DL à l'ordre 4 au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$:

$$f(x) = \ln(\frac{x+1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^4}),$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5} + o(\frac{1}{x^5}).$$

.

Exercice 4 Développement limité au voisinage de a

1. On a :
$$\sin(x) = \sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y.$$
Lorsque x est au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, y est au voisinage de 0. On utilise donc le DL de $\cos y$ au voisinage de 0 :
$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$$
et en repassant à la variable $x = y + \frac{\pi}{2}$, on obtient le DL à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $\sin(x)$:
$$\sin(x) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!} + o((x - \frac{\pi}{2})^5)$$

2.
$$(\cos(2x))^2 = \frac{1}{4} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6}) + 2(x - \frac{\pi}{6})^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\pi}{6})^3 - \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{6})^4 + o((x - \frac{\pi}{6})^4)$$

Exercice 5

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \text{ donc } \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\sim} 1 \text{ d'où } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$
$$(\frac{1}{1-x} - e^x)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x + o(x) \text{ donc } (\frac{1}{1-x} - e^x)\frac{1}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ d'où } \lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-x} - e^x)\frac{1}{x^2}$$

Intégrales

Exercice 6 Fractions rationnelles

1.
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}dx = [\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2.
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+3}dx &= \int_0^1 \frac{\frac{3}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+3}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3}dx \\
&= \frac{3}{2}[\ln|x^2+x+3|] + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\frac{4}{11}}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2}dx \\
&= \frac{3}{2}[\ln|x^2+x+3|] + [\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\ln(\frac{5}{3}) + \frac{1}{\sqrt{11}}(\arctan(\frac{3}{\sqrt{11}}) - \arctan(\frac{1}{\sqrt{11}}))
\end{aligned}$$

3. Attention, erreur sur le sujet : intégrer entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \left[x-\frac{2}{x}+2\ln|x|-\ln|x-1|\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{17}{4}+\ln 6\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \left[\ln|x+2|\right]_0^1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \ln(\frac{3}{2}) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Exercice 7

1.

$$\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2t+1}}dt = \int_0^1 (u^2-1)du = \frac{2}{3}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_{\operatorname{arg\,sinh} 0}^{\operatorname{arg\,sinh} 1} du = \operatorname{arg\,sinh} 1 - \operatorname{arg\,sinh} 0 = \ln(1+\sqrt{2})$$

3. Ce changement de variables était un peu plus délicat. Il fallait remarquer que :

$$\sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

On a alors :

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{3+\sin(2x)}dx = \int_{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(\frac{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}})\right)$$

Exercice 8

1. Primitives de $\ln x$:

$$x\ln x - x + k,\ k \in \mathbb{R}$$

2. Primitives de $\arctan x$:

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + k,\ k \in \mathbb{R}$$

3. Primitives de $\arcsin x$:

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

4. Primitives de $(x^2+x+1)e^{2x}$:

$$\frac{e^{2x}}{2}(1+x^2) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

5. Primitives de $x \sin x$:

$$-x\cos x + \sin x + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Intégrales généralisées

Exercice 9

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$: problème en $+\infty$

   On pose $y = \frac{1}{t}$ et on a :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y}^2)^{1/2}} = \frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}}.$$

   Au voisinage de $y = 0$ on a :

$$\frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}} = y^2(1+\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) = y^2 + \frac{1}{2}y^4 + o(y^4),$$

   d'où, au voisiange de $t = +\infty$:

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^4} + o(\frac{1}{t^4}).$$

   On a donc :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

   Remarque : n peut trouver cet équivalent sans passer par les DL. On a :

$$1 + t^2 \underset{\infty}{\sim} t^2,$$

   d'où :

$$(1+t^2)^{1/2} \underset{\infty}{\sim} (t^2)^{1/2} = t \text{ et donc } \frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

   Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$ converge puisqu'elle est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ qui est convergente (intégrale de Riemann)

2. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$: problème en $+\infty$

   On a, sur $[\pi, +\infty[$, $0 < \left|\frac{\cos x}{x^3}\right| < \frac{1}{x^3}$. Or, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ converge (intégrale de Riemann) donc d'après le critère de majoration, $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^3}\right| dx$ converge, ce qui implique que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ converge.

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$: problème en 0

   La fonction $\frac{\sin x}{x}$ admet une limite finie en 0 : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par conséquent, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

Examen de Mathématiques

Analyse

13 janvier 2009

Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème est approximatif. Une attention particulière sera portée aux justifications, à la clarté du raisonnement et à la rédaction.

Exercice 1 (6 points)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+x} + (2+x)^{\frac{1}{3}}}$.

1. Trouver c_0, c_1, c_2 et d tels que :

$$6t^3 = (t+1)(c_2t^2 + c_1t + c_0) + d.$$

2. En posant le changement de variables $t = (2+x)^{\frac{1}{6}}$ et en vous aidant de la question 1, calculer l'intégrale :

$$\int_a^0 f(x)dx, \; \forall a \in]-2, 0[.$$

3. En passant à la limite quand a tend vers -2, conclure quant à la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale $\int_{-2}^0 f(x)dx$.

4. Question supplémentaire : Donner l'ensemble des primitives de f.

Exercice 2 (5 points)

On considère l'intégrale I définie par :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{x\ln(1+x)} - 1}{x^{\frac{5}{2}}} dx.$$

1. A l'aide des DL usuels, calculer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 4 de la fonction $e^{x\ln(1+x)}$.

2. En déduire la nature de l'intégrale I.

Exercice 3 (5 points) 1. Trouver a et b tels que :

$$\frac{2}{x(1+2x)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{1+2x}.$$

2. A l'aide d'une intégration par parties et de la question 1, calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx.$$

Exercice 4 (6 points)

1. A l'aide du théorème des accroissements finis (appliqué à la fonction ln), montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. Calculer alors

$$\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$$

et en déduire que

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^n = e^1$$

Introduction à l'Analyse Harmonique

E. Montseny

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Séries de Fourier **3**
2.1 Définitions 3
2.2 Propriétés et théorème important 7

3 Transformation de Fourier **8**
3.1 Définitions 8
3.2 Propriétés de la transformation de Fourier 10

4 Transformation de Laplace **12**
4.1 Définitions 12
4.2 Propriétés 13

1 Introduction

Au XVIII^{e} s, les physiciens et mathématiciens se penchèrent sur l'expression des solutions des premières équations aux dérivées partielles établies à cette époque : l'équation des cordes vibrantes et l'équation de la chaleur. Bien que l'intuition de décomposer selon les fréquences propres (harmoniques) était présente dans les esprit depuis déjà quelques temps (notamment pour l'équation des cordes), c'est Fourier qui le premier apporta au début du XIX^{e} s. de nombreux éléments pour expliciter cette décomposition et la systématiser : l'analyse harmonique était née, et allait connaître un développement permanent jusqu'à nos jours.

On introduit dans ce cours les notions de base de l'analyse harmonique. On y présente les outils incontournables que sont les séries de Fourier, la transformation de Fourier ainsi que la transformation de Laplace qui la généralise [1]. Le but du cours est d'assimiler les notions clé de l'analyse harmonique et d'acquérir quelques automatismes calculatoires indispensable dans les sciences de l'ingénieur.

Bien qu'il ne s'agisse pas explicitement d'un cours de traitement du signal, le terme **signal** y sera allègrement employé. Il faut voir ce terme comme étant générique : si une émission TV hertzienne est bien sûr un signal, l'évolution au cours du temps de la flèche à l'extrémité d'une poutre en est également un, ainsi qu'un champ de pression $u(t,x)$ donnant la pression en un point spatial x au temps t, dont on pourra effectuer une transformation de Fourier (par exemple) selon la variable t, ou x, ou les deux !

Comme son nom l'indique, le but de l'analyse harmonique est de travailler dans le domaine **fréquentiel**. Les outils sus-cités permettent de donner une nouvelle représentation (équivalente) d'un signal f (on parle de dualité temps-fréquence). Ces outils permettent de traiter de nombreux problèmes de manière simplifiée et pourvu d'une signification physique certaine.

2 Séries de Fourier

2.1 Définitions

Les séries de Fourier sont un outil de choix pour l'étude de fonctions périodiques. Le résultat essentiel de cette section est que toute fonction périodique (assez régulière) peut être écrite comme étant la somme de fonctions élémentaires périodiques (synthèse).

[1] La théorie des distributions, développée par L. Schwartz, est un cadre nécessaire (c'est en fait le seul) à une présentation rigoureuse de tous ces outils (ne serait-ce que par l'omniprésence de la distribution de Dirac δ) : elle permet de les unifier et de donner un sens aux arguments physiques intuitifs utilisés jusqu'alors.

Définition 1

Soit f une fonction T-périodique, à valeur réelle ou complexe. On appelle ***coefficients de Fourier exponentiels de*** f *la suite de nombres complexes définie par :*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{\frac{-2in\pi t}{T}}dt,\ \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Si la fonction f est à valeurs ***réelles****, on utilise souvent les* ***coefficients de Fourier trigonométriques de*** f *:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{2}$$

Remarque : On parle souvent de **spectre de** f . Cette nomination sera justifiée par la suite lorsque l'on parlera de spectre fréquentiel d'un signal.

Remarque : Si les coefficients a_n et b_n sont souvent utilisé lorsqu'on manipule des fonctions réelles, les coefficients c_n présentent l'intérêt, en plus d'être plus synthétiques, de faire l'analogie avec la transformée de Fourier continue des fonctions non périodiques (cf. section suivante).

Proposition 2

Si f est impaire, alors $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $b_n = \frac{4}{T}\int_a^{a+T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Si f est paire, alors $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n = \frac{4}{T}\int_a^{a+T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple : – Soit la fonction L-périodique g définie par (cf. figure 1) :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [0, \frac{L}{2}] \\ 2 - \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases} \tag{3}$$

Ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} &a_0 = 1,\ a_n = 0 \text{ ni } n \text{ pair et} \frac{-4}{n^2\pi^2} \text{ si n est impair.} \\ &b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ (f \text{ est paire}). \end{aligned} \tag{4}$$

– Soit la fonction L-périodique h définie par (cf. figure 2) :

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, \pi] \\ 0 \text{ si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} &a_0 = \tfrac{1}{2},\ a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &b_n = 0 \text{ ni } n \text{ pair et } \tfrac{4}{n\pi} \text{ si n est impair.} \end{aligned}$$

Définition 3 (*Synthèse*)

On appelle ***développement en série de Fourier*** *(DSF)* ***de*** f *(on parle aussi de* ***synthèse de Fourier*** *) la série :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi nt}{T}}, \tag{5}$$

ou, dans le cas des coefficients trigonométriques :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right). \tag{6}$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 4 (*Théorème de Dirichlet*)

Soit f une fonction $T-$périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, le DSF de f converge simplement vers $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$ (demi-somme entre les limites à gauche et à droite), soit :

$$\forall t,\ \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi nt}{T}}, \tag{7}$$

en utilisant les coefficients trigonométriques :

$$\forall t,\ \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right). \tag{8}$$

Concrètement, ça signifie que en tout point de continuité de la fonction f, le DSF de f vaut $f(t)$. Si f est discontinue en t, son DSF est égal à $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$.

Ainsi, toute fonction périodique f est entièrement caractérisée par un ensemble dénombrable de coefficients $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$: on peut recomposer la fonction f par la seule connaissance de ces coefficients, qui traduisent la contribution de la $n^{ème}$ harmonique (fréquence $\frac{n}{T}$) dans le signal global f. Dit autrement, toute fonction périodique f (assez régulière) est une superposition (pondérée) de signaux périodiques élémentaires de fréquence multiple de la fréquence fondamentale $\frac{1}{T}$ (fréquence de f).

Cette propriété est à la base du développement de l'analyse harmonique. Outre une représentation intuitive des signaux, elle permet de simplifier de nombreux problèmes en utilisant une telle décomposition, de telle sorte que l'analyse de Fourier se retrouve dans à peu près toutes les sciences de l'ingénieur : mécanique, acoustique, traitement du signal, analyse des système linéaires, etc.

Remarque : La formule (7) pour une fonction continue s'écrit :

$$\forall t,\ f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi nt}{T}}.$$

Cette écriture ressemble à une décomposition de la fonction f sur une base (de fonctions). La notion de base est effectivement sous-jacente au développement en séries de Fourier.

Exemple : Reprenons l'exemple de la fonction triangle g traitée précédemment. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et est continue. Ainsi, elle s'identifie en tout point à son développement en série de Fourier :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p \geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi(2p+1)\ t}{L}\right).$$

De plus, on peut (par exemple) aisément en déduire l'égalité (loin d'être triviale) suivante, en prenant $t = \frac{L}{2\pi}$:

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos(2p+1) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

On donne ci-après un exemple de synthèse de Fourier pour les deux signaux g et h dont on a calculé les coefficients de fourier précédemment.

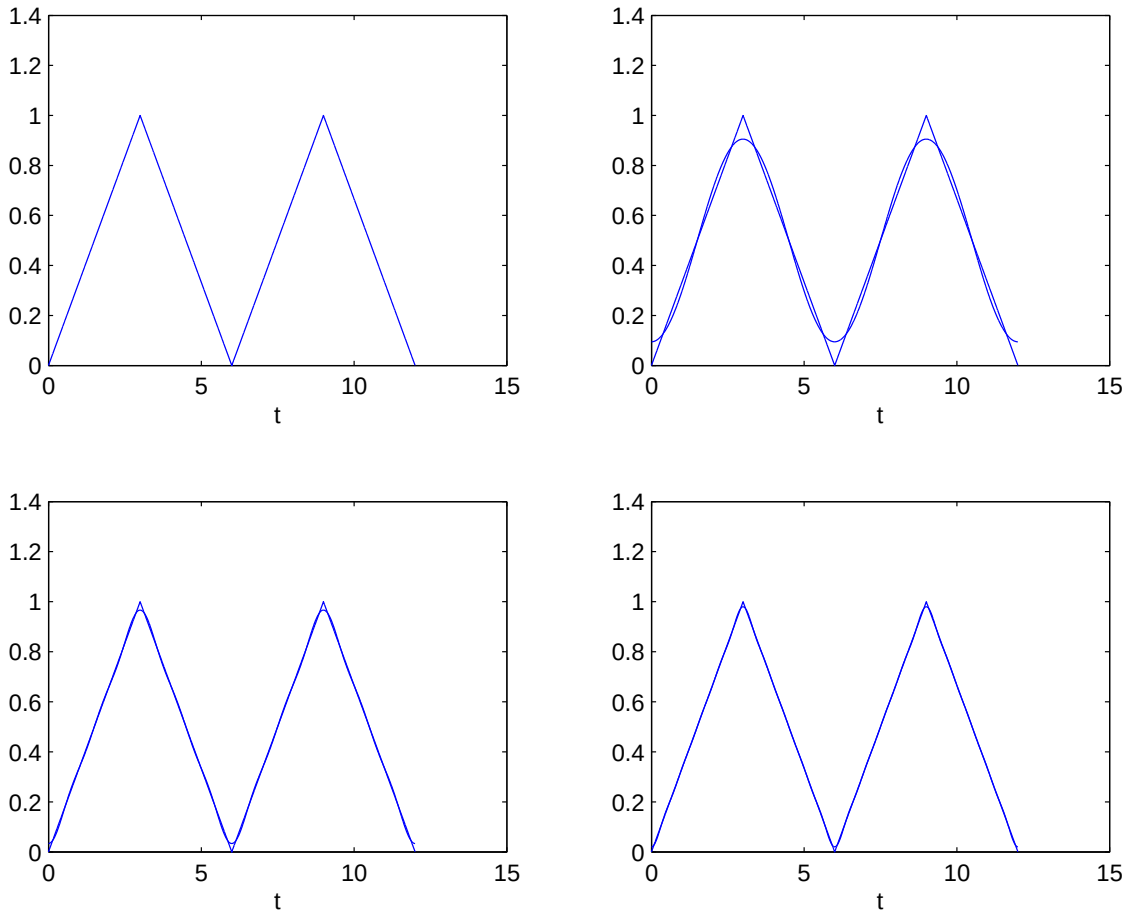

FIG. 1 – Synthèse de Fourier de la fonction g ($L = 6$) jusqu'à la première, 5^e et 9^e harmonique.

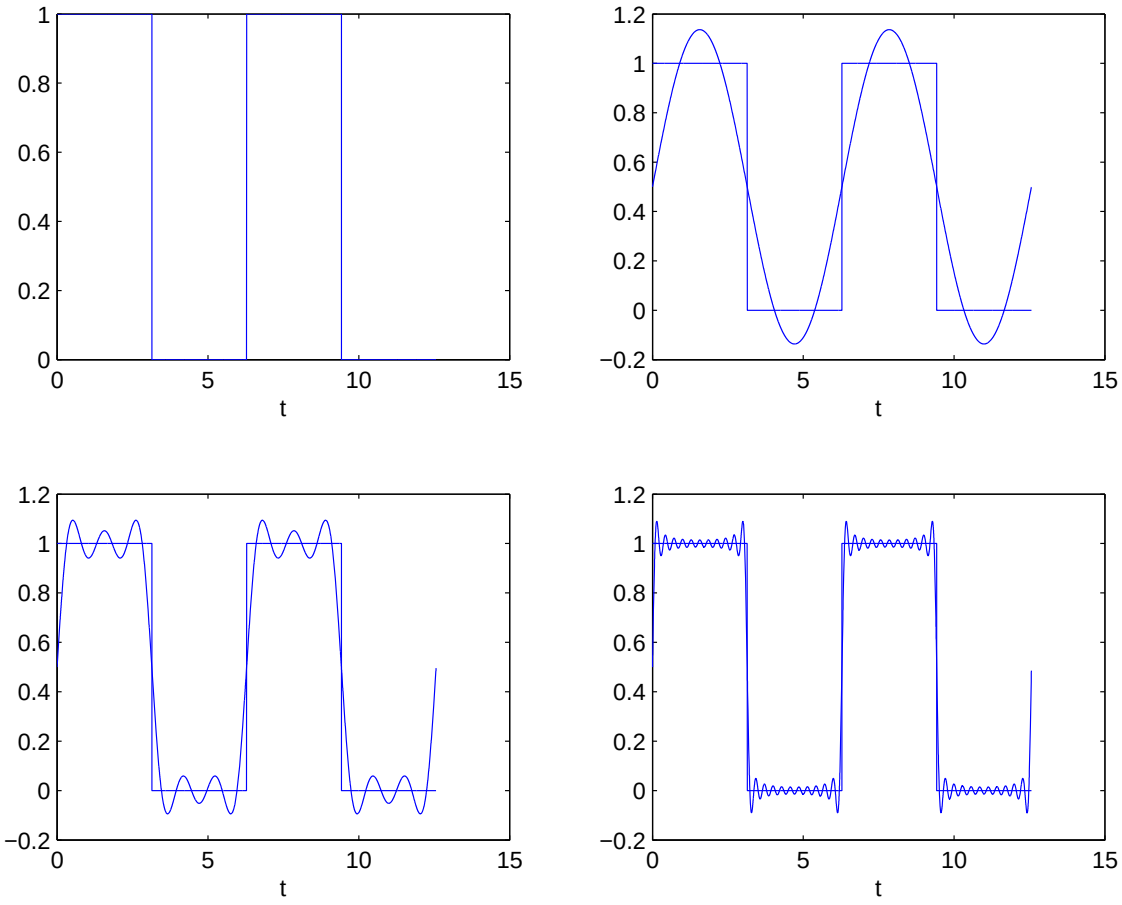

FIG. 2 – Synthèse de Fourier de la fonction h jusqu'à la première, 5^e et 21^e harmonique.

2.2 Propriétés et théorème important

Notons tout d'abord que, dans le cas où f est une fonction a valeurs réelles, on a les relations suivantes entre les coefficients exponentiels et trigonométriques :

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_{-n}}$$

et réciproquement :

$$a_0 = 2c_0\ \ ;\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = c_n + c_{-n},\ \ b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}).$$

Le théorème qui suit est fondamental : il donne une relation directe entre l'énergie d'un signal périodique et ses coefficients de Fourier.

Théorème 5 (*Formule de Parseval*)

Soit f une fonction T-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\,. \tag{9}$$

La même relation si on utilise les coefficients trigonométriques (fonction a valeurs réelles) :

$$\frac{2}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2 + |b_n|^2\,.$$

Remarque : Comme souvent en mathématiques, ce théorème peut être employé de plusieurs manières. On peut utiliser cette relation pour donner l'expression de l'énergie d'un signal à partir de ses coefficients de fourier, mais aussi pour calculer explicitement la valeur d'une série numérique "compliquée". (comme on l'a fait en utilisant le théorème de Dirichlet dans un exemple précédent)

3 Transformation de Fourier

De manière lapidaire, la transformation de Fourier est aux fonctions intégrables[2] ce que les séries de Fourier sont aux fonctions périodiques. On a vu qu'une fonction de période T peut être représentées par des coefficients traduisant le "degré de contribution" des harmoniques de fréquence $\frac{n}{T}$ dans la fonction.

On peut alors se demander ce qu'il se passe lorsqu'on travaille avec une fonction non périodique, qui peut être vue comme une fonction périodique dont la période T tend vers l'infini. Intuitivement, on va se retrouver avec des harmoniques de fréquences $\frac{n}{T}$ de plus en plus proches jusqu'à obtenir un véritable continuum de fréquences ; la suite de coefficients $\{c_n\}_n$ laisse ainsi place à une fonction, appelée spectre fréquentiel de f, ou transformée de Fourier de f. La série de Fourier, traduisant la superposition des harmoniques composant le signal f, laissera place à une intégrale sur l'ensemble des fréquences réelles.

Attention : Ne pas confondre transformée et transformation : la transformée est le résultat de la transformation.

3.1 Définitions

Définition 6

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une fonction intégrable[3]. On appelle ***transformée de Fourier de*** *f la fonction $\widehat{f}$ (de la variable réelle ξ et à valeur complexe) définie par :*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\mathrm{i}\pi\xi t} dt. \tag{10}$$

On parle souvent de spectre (fréquentiel) de f, car la variable ξ est homogène à une fréquence. On note parfois $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier (donc $\widehat{f} := \mathcal{F}f$)

Attention : Il existe plusieurs définitions de la transformation de Fourier, toutes équivalentes mais introduisant des coefficients dans les formules. On prendra garde à la définition choisie dans les différents ouvrages lorsqu'on cherche un formulaire de transformées.

Remarque : Pour reprendre ce qui a été dit en introduction de cette section, un calcul simple montre que si on considère la troncature d'une fonction et sa périodisation, alors ses coefficients de Fourier sont, à un

[2] En fait aux fonctions de carré intégrable, voire, dans un cadre plus général, aux distributions tempérées.

facteur près, exactement la transformée de Fourier (continue) du signal tronqué, évaluée à la fréquence $\frac{n}{T}$. On sent bien que, en repoussant la troncature à l'infini, le spectre de la fonction de départ et celui de la fonction tronquée vont coincider (puisque la troncature se rapproche du signal original), et les coefficients de Fourier de la fonction tronquée-périodisée vont ainsi devenir le spectre (continu) de f comme le mettra en évidence le théorème suivant.

Comme la transformée de Fourier d'une fonction est une fonction à valeurs complexes, sa représentation est impossible. On dispose cependant de plusieurs représentations, ayant chacune une signification physique, permettant de la visualiser ; par exemple, le carré du module, appelé densité spectrale d'énergie (DSE), en est une qui permet de localiser le contenu énergétique d'un signal en fonction des fréquences (cf. figure 3).

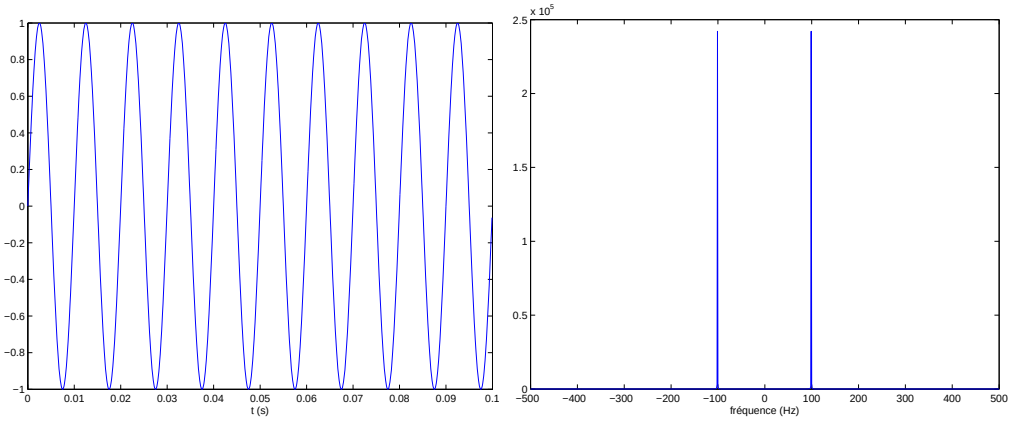

FIG. 3 – Sinus de fréquence 100 Hz et sa DSE.

Si la fonction $\widehat{f}$ est également intégrable, on définit alors la transformation inverse, qui permet de revenir à l'original f à partir de $\widehat{f}$, mettant en évidence l'équivalence entre les deux représentations (temporelles et fréquentielles). Cette équivalence est essentielle car elle permet de légitimer l'utilisation de la transformation de Fourier pour résoudre de nombreux problèmes de manière simplifiée.

Définition 7

Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la ***transformation de Fourier inverse*** *$\mathcal{F}^{-1}$ par*

$$\left(\mathcal{F}^{-1}g\right)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, e^{2\mathrm{i}\pi\xi t} d\xi. \tag{11}$$

On a alors le résultat suivant, liant f et $\widehat{f}$.

Théorème-Définition 8

) Si f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on montre que f est égale (au sens des fonctions de $\in L^1$) à $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$, ce qui s'écrit :

$$f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f} \text{ presque partout.} \tag{12}$$

Si on veut écrire cette égalité "point par point", on a le résultat suivant, sous l'hypothèse que f

soit dérivables à gauche et à droite en t et que les limites existent :

$$\forall t,\ \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\mathrm{i}\pi\xi t} d\xi. \tag{13}$$

En les points de continuité de f, on a plus simplement :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\mathrm{i}\pi\xi t} d\xi. \tag{14}$$

On peut noter de nombreuses analogies avec la synthèse en séries de Fourier vu dans la section précédente, notament le théorème de Dirichlet qui affirme que toute fonction T-périodique se décompose comme somme de fonctions périodiques de fréquence $\frac{n}{T}$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi nt}{T}}.$$

La différence est qu'ici, une fonction non périodique se décompose en une somme (l'intégrale est une somme) de signaux périodiques à toutes les fréquences réelles ξ, et non seulement des fréquences dénombrable $\frac{n}{T}$. L'analogie est la même entre l'expression des c_n donné par (1) et celle de $\widehat{f}(\xi)$: le nombre $\widehat{f}(\xi)$ représente le "degré de présence" de la fréquence ξ dans le signal f, conférent à cette transformation une signification physique forte.

3.2 Propriétés de la transformation de Fourier

La transformation de Fourier possède de nombreuses propriétés permettant de faciliter le calcul de certaines transformées. Certaines propriétés ont une importance capitale pour la modélisation de systèmes dynamiques régi par une convolution (tous les systèmes linéaires !), pour la résolution d'équation différentielle, etc.

Proposition 9

- ***Linéarité*** *: Pour toutes fonctions f et g intégrables et pour tout réel λ, on a :*

$$\widehat{\lambda f + g} = \lambda\widehat{f} + \widehat{g}.$$

- ***Contraction****. Pour tout réel non nul a, on a :*

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\xi}{a}).$$

- ***Décalage temporel*** *(retard) : Pour tout réel t_0, on a :*

$$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\xi)\ e^{-2\mathrm{i}\pi\xi t_0}.$$

- ***Décalage fréquentiel*** *: Pour tout réel ξ_0, on a :*

$$f(t)\ e^{2\mathrm{i}\pi\xi_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\xi-\xi_0).$$

Exemple : La transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ en ξ est $\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ (le montrer !). En déduire la transformée de $\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ (TD).

Les propriétés qui suivent sont essentielles et mettent en évidences l'intérêt que peut présenter la transformation de Fourier pour la résolution d'équations (intégro-)différentielles/ aux dérivées partielles, ainsi qu'à la modélisation des systèmes linéaires, dans laquelle elle tient une place centrale.

Proposition-Définition 10

- ***Transformée d'une dérivée*** *: Si f est dérivable et à dérivée intégrable, on a :*

$$\widehat{\frac{df}{dt}}(\xi) = 2\mathrm{i}\pi\xi\,\widehat{f}(\xi).$$

De manière plus générale :

$$\widehat{\frac{df^{(n)}}{dt}}(\xi) = (2\mathrm{i}\pi\xi)^n\ \widehat{f}(\xi)$$

- ***Multiplication par t :*** *Si $tf(t)$ intégrable, alors :*

$$-2\mathrm{i}\pi\,\widehat{tf(t)}(\xi) = \frac{d\widehat{f}}{ds}(\xi)$$

- ***Transformée d'une convolée*** *: on appelle* ***produit de convolution de f par g*** *la fonction, notée $f * g$, définie par :*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

On a alors la propriété essentielle :

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi).$$

On voit tout suite les simplifications que peuvent apporter ces propriétés : ainsi, une équation différentielle pourra être transformée en équation algébrique aisément résoluble (sous réserve de pouvoir déterminer la transformée inverse de la solution...) ; un produit de convolution, délicat à manipuler et très couteux en terme de calcul, pourra être remplacé par un produit classique en représentation fréquentielle, propriété très utilisée en automatique et traitement du signal.

Remarque : Attention à le notation abusive $\widehat{tf(t)}(\xi)$, qui est parfois employée par commodité : $tf(t)$ n'est pas une fonction mais un nombre ; or, la transformation de Fourier s'applique à une fonction, que l'on devrait noter $t \mapsto tf(t)$ ou $.f(.)$ en tout rigueur.

Comme pour les séries de Fourier, il existe un résultat établissant une correspondance entre l'énergie d'un signal et celle de sa transformée de Fourier, sous réserve qu'ils soient tous deux de carré intégrable.

Théorème 11 (*de Plancherel*)

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ (f de carré sommable), alors sa transformée de Fourier est également de carré sommable et on a l'égalité entre leur norme L^2 :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Proposition 12 (*Décroissance à l'infini des transformées de Fourier*)

La transformée de Fourier d'une fonction de régularité $\mathcal{C}^k$ décroît vers 0 au moins aussi vite que ξ^k lorsque $|\xi| \to +\infty$.

Cette propriété est intuitivement évidente : plus un signal est régulier, plus son contenu fréquentiel va être basse fréquence, les hautes fréquences[4] caractérisant des phénomènes rapides (voire brutaux).

4 Transformation de Laplace

Dans cette partie, f désignera une fonction causale (i.e. telle que $f(t) = 0\ \forall t \leqslant 0$) localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. intégrable sur tout fermé borné). La notion de causalité fait de la transformation de Laplace un outil de choix pour l'étude des systèmes dynamiques et la résolution d'équations (intégro-)différentielles.

Bien que constituant une généralisation de la transformation de Fourier[5], la transformation de Laplace est généralement utilisée pour l'études des systèmes et la résolution d'équations différentielles ou la "partie temporelle" des équations aux dérivées partielles, associée à des conditions initiales, alors que la transformation (ou série) de Fourier est davantage dédiée à l'analyse fréquentielle des signaux et à la "partie spatiale" des équations aux dérivées partielles, associée à des conditions aux limites.

4.1 Définitions

Définition 13

*On appelle **transformée de Laplace de** f la fonction F de la variable complexe p définie (lorsqu'elle existe) par l'intégrale :*

$$F(p) := \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

On note souvent $\mathcal{L}$ la transformation de laplace (donc $F := \mathcal{L}(f)$).

Remarque : On appelle parfois la fonction $F(p)$ le **symbole-Laplace** de f.

Remarque : On passe ici sous silence certaines considération sur p concernant la convergence de l'intégrale (abscisse de convergence).

Exemple : $F(p) = \frac{1}{p}$ est la transformée de Laplace de la fonction de heaviside (ou échelon unité) définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

[4] Bien sûr, les mots employés sont à prendre avec la prudence qu'il se doit : la notion de basse ou aute fréquence est relative au phénomène étudié : il est évident que 1 kHz est une fréquence très basse pour un signal de type onde radio, et pourtant élevée si on étudie par exemples des phénomènes biologiques lents.

[5] les séries de Fourier et la transformation de Fourier sont des transformations de Laplace dans le cadre mathématique adéquat.

Remarque importante : La formule d'inversion de la transformée nécessitant des notions d'intégration de fonctions de la variable complexe, elle ne sera pas abordée ici ; le lecteur doit juste savoir qu'elle existe, et qu'elle peut se calculer de plusieurs manière. On se limitera dans ce cours à utiliser les tables et les propriétés de la section suivante pour nos calculs.

4.2 Propriétés

Les propriétés de la transformation de Laplace sont similaires à celle établies pour la transformation de Fourier. On donne ci-après les plus utiles d'entre elles.

Proposition 14

- ***Linéarité*** *: Pour toutes fonctions f et g et pour tout réel λ, on a :*

$$\mathcal{L}(\lambda f + g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g).$$

- ***Contraction****. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :*

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F(\frac{p}{a}).$$

- ***Décalage temporel*** *(retard) : Pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :*

$$f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)\ e^{-ap}.$$

- *Pour tout réel a, on a :*

$$f(t)\ e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p-a).$$

Exemple : La transformée de Laplace de $f(t) = e^{at}$ est $F(p) = \frac{1}{p-a}$.

Proposition 15

- ***Transformée d'une dérivée*** *:*

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = p\mathcal{L}f(p) - f(0^+).$$

De manière plus générale :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](p) = p^n \mathcal{L}f(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+).$$

- ***Multiplication par t :***

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right](p) = -F'(p).$$

- ***Transformée d'une convolée*** *:*

$$\mathcal{L}\left[f * g\right] = \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g.$$

En particulier, on déduit de cette formule la transformée d'une primitive de f :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Les théorèmes qui suivent sont très utiles pour établir la valeur en régime asymptotique ou la valeur initiale de f à partir de calculs effectués sur le symbole F.

Théorème 16 (*de la valeur finale*)

Si f admet une limite en $+\infty$, alors $p_0 \leq 0$ et

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p).$$

Théorème 17 (*de la valeur initiale*)

Si $f(0^+)$ existe, alors :

$$f(0^+) = \lim_{|p| \to +\infty} F(p).$$

Exemple : On peut aisément vérifier ces deux théorème sur la fonction échelon par exemple.

Index

C

Coefficients de Fourier 4
Convolution (produit de) 11

D

Dirichlet (théorème de) 5

H

Harmonique 5

P

Parseval (formule de) 7
Plancherel (théorème de) 11

S

Séries de Fourier 3
Spectre fréquentiel 4
Symbole Laplace 12
Synthèse de Fourier 4, 9

T

Transformation de Fourier 8
Transformée de Laplace 12

V

Valeur finale (théorème de) 14
Valeur initiale (théorème de) 14

Séries de Fourier

Exercice 1 (exemple du cours) Soit la fonction L-périodique g définie par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [0, \frac{L}{2}] \\ 2 - \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [\frac{2}{L}, L] \end{cases}$$

1. Calculer ses coefficients de Fourier.
2. Etablir son développement en série de Fourier
3. Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos(2p+1) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 Soit la fonction 2π-périodique par :

$$f(x) = x \ , \ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Représenter f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Ecrire le développement en série de Fourier de f.
3. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Transformation de Fourier

Exercice 3 Soit la fonction *porte* (ou *indicatrice*) définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \chi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

1. Calculer $\widehat{\chi_{[-1,1]}}$.

2. En déduire $\widehat{\chi_{[0,1]}}$ (on évitera la calcul direct pour s'entraîner à utilise les formules du cours)
3. Soit la fonction $f_T := \frac{1}{T}\chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$.
   (a) Que vaut intuitivement la limite de f_T quand T tend vers 0 ? (un graphe avec plusieurs représentations pourra aider.
   (b) Calculer la transformée de Fourier de f_T.
   (c) En déduire, par un passage à la limite formel, que

$$\widehat{\delta}(\xi) = 1 \ \forall \xi.$$

Exercice 4

Calculer l'original de la fonction définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{e^{-2i\pi\xi}}{1+\pi^2\xi^2}.$$

Transformation de Laplace

Exercice 5 Soit une poutre de longueur L, de module d'Young E et de moment d'inertie I, soumise à une dentisté de charge uniforme w_0. Les extrémités de la poutre sont pourvues d'articulations.

La flèche $y(x)$ de la poutre vérifie :

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = \frac{w_0}{EI}. \\ y(0) = 0 = y''(0) \\ y(L) = 0 = y''(L) \end{cases}$$

Résoudre cette équation différentielle en utilisant la transformation de Laplace et donner l'expression de $y(x)$.

Exercice 6

Calculer la transformée de Laplace de f définie par :

$$f(t) = \sin(2\omega t)$$

En déduire celle de $t \mapsto t\sin(2\omega t)$.

Séries de Fourier

Exercice 1

1. La fonction est paire (faire un dessin !), donc les b_n sont tous nuls.De plus, on a :

$$a_n = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} g(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt = \frac{4}{L}\int_0^{L/2}\frac{2}{L}t\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt.$$

On a donc $a_0 = \frac{8}{L^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{L/2} = 1$. Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{L^2}\int_0^{L/2} t\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{8}{L^2}\underbrace{\left[\frac{L}{2n\pi}t\sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)\right]_0^{L/2}}_{=0} - \frac{8}{L^2}\int_0^{L/2}\frac{L}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{4}{Ln\pi}\left[\frac{L}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)\right]_0^{L/2} = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.
\end{aligned}$$

2. La fonction g est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car polynomiale par morceaux), donc d'après le théorème de Dirichlet on peut écrire l'égalité :

$$\begin{aligned}
\forall t,\, g(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right). \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) \quad \text{, séparation en } n \text{ pairs et impairs :} \\
&= \frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_{p\geqslant 0} a_{2p}\cos\left(\frac{2\pi(2p)t}{L}\right)}_{=0 \text{ car les } a_n \text{ sont nuls pour } n \text{ pairs}} + \sum_{p\geqslant 0} a_{2p+1}\cos\left(\frac{2\pi(2p+1)t}{L}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{p\geqslant 0}\frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi(2p+1)t}{L}\right).
\end{aligned}$$

3. En prenant l'égalité ci-dessus en $t = \frac{L}{2\pi}$, on obtient :

$$g(\frac{L}{2\pi}) = \frac{1}{2} + \sum_{p \geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos(2p+1) = \frac{1}{\pi}$$

d'où le résultat annoncé.

Exercice 2 Soit la fonction 2π-périodique par :

$$f(x) = x \ , \ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Dessin fait en TD.
2. La fonction est impaire, donc les coefficients a_n sont nuls pour tout n. De plus :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi x \sin(nx)\, dx \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx}_{=0} \\ &= \frac{2(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

La fonction est $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car polynomiale par morceaux), donc d'après le théorème de Dirichlet on peut écrire l'égalité :

$$\begin{aligned} \forall x, \ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} &= \begin{cases} 0 \text{ si } x = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) \quad \text{sinon} \end{cases} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \sum_{n \geqslant 1} b_n \sin(nx) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx). \end{aligned}$$

3. L'égalité ci-dessus évaluée en $x = 1$ donne :

$$f(1) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \sin n}{n},$$

d'où le résultat annoncé.

4. L'égalité de Parseval permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n \geqslant 1} |b_n|^2 \\ \Leftrightarrow \ & \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dt = \sum_{n \geqslant 1} \frac{4}{n^2} \\ \Leftrightarrow \ & \tfrac{1}{\pi} \tfrac{2\pi^3}{3} = 4 \textstyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}; \end{aligned}$$

il suit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Transformation de Fourier

Exercice 3 Soit la fonction *porte* (ou *indicatrice*) définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \chi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

1. Par définition :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t)\, e^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi\xi}\left(e^{2\mathrm{i}\pi\xi} - e^{-2\mathrm{i}\pi\xi}\right) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}. \end{aligned}$$

2. Bien sûr, le calcul direct est évident. On s'entraîne ici à utiliser les formules du cours. On remarque (faire des dessins !) que $\chi_{[0,1]}$ est une porte, comme $\chi_{[-1,1]}$, mais ayant subit une contraction (sa "largeur" est de 1, alors que la largeur de $\chi_{[-1,1]}$ est de 2), et un décalage (puisque $\chi_{[-1,1]}$ est centrée sur 0 alors que $\chi_{[0,1]}$ est centrée sur 1/2. Il s'agit donc d'exprimer $\chi_{[0,1]}$ en fonction de décalages et translation de $\chi_{[-1,1]}$, et d'utiliser ensuite les formules du court sur les transformées de Fourier.

   On décide (de manière arbitraire) de s'occuper d'abord de la contraction. Son facteur est 2 (pour les raisons sus-citées). Plus précisemment, on a :

$$\chi_{[0,1]}(t) = \chi_{[0,2]}(2t).$$

   On peut donc exprimer $\widehat{\chi_{[0,1]}}$ facilement en fonction de $\widehat{\chi_{[0,2]}}$:

$$\widehat{\chi_{[0,1]}}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{\chi_{[0,2]}}(\frac{\xi}{2}).$$

   Ensuite, on s'occupe du décalage permettant de passer de $\chi_{[-1,1]}$ à $\chi_{[0,2]}$; il s'agit d'un décalage d'une unité, soit :

$$\chi_{[0,2]}(t) = \chi_{[-1,1]}(t-1),$$

   ce qui permet d'exprimer $\widehat{\chi_{[0,2]}}$ facilement en fonction de $\widehat{\chi_{[-1,1]}}$:

$$\widehat{\chi_{[0,2]}}(\xi) = e^{-2\mathrm{i}\pi\xi}\, \widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi).$$

   Au final, on peut écrire le résultat qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[0,1]}}(\xi) &= \frac{1}{2}\widehat{\chi_{[0,2]}}(\frac{\xi}{2}) = \frac{1}{2}e^{-2\mathrm{i}\pi\xi/2}\, \widehat{\chi_{[-1,1]}}(\frac{\xi}{2}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}\pi\xi}\, \frac{\sin(2\pi\xi/2)}{\pi\xi/2} = e^{-\mathrm{i}\pi\xi}\, \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}. \end{aligned}$$

3. Soit la fonction $f_T := \frac{1}{T}\chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$.

   (a) On tombe sur un objet qui vaut $+\infty$ en 0 et 0 partout ailleurs. Il s'agit de la distribution de dirac notée δ.

   (b) Par calcul direct ou en utilisant le même procédé que ci-dessus, on o :

$$\widehat{f_T}(\xi) = \frac{\sin(\pi T\xi)}{\pi T\xi}.$$

   (c) En faisant tendre T vers 0 dans l'égalité ci-dessus, et en supposant qu'on peut inverser l'opération$\widehat{\ }$et la limite, l'égalité ci-dessus donne :

$$\widehat{\delta}(\xi) = \lim_{T\to 0} \frac{\sin(\pi T\xi)}{\pi T\xi} = 1 \ \forall \xi.$$

Exercice 4

1. On a :

$$\frac{e^{-2i\pi\xi}}{1+\pi^2\xi^2} = \frac{4e^{-2i\pi\xi}}{4+4\pi^2\xi^2} = e^{-2i\pi\xi}\frac{2\times 2}{2^2+4\pi^2\xi^2}.$$

   On reconnait sous cette forme la transformée de $e^{-2|t|}$ décalée de 1 (du fait de la multiplication par $e^{-2i\pi\xi\,1}$). Ainsi :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{-2i\pi t}}{1+\pi^2 t^2}\right](t) = e^{-2|t-1|}.$$

Nota : ne pas perdre de vue que la notation $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{-2i\pi t}}{1+\pi^2t^2}\right]$ est impropre car $\frac{e^{-2i\pi t}}{1+\pi^2t^2}$ est un nombre et non une fonction...

Transformation de Laplace

Exercice 5 On applique la transformation de Laplace à chaque membre de l'équation différentielle (l'opération est linéaire) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y^{(4)}](p) &= p^4Y(p) - \underbrace{p^3y(0)}_{0} - p^2y'(0) - \underbrace{py''(0)}_{0} - y'''(0),\\
\mathcal{L}[\frac{w_0}{EI}](p) &= \frac{w_0}{EI}\mathcal{L}[1](p) = \frac{w_0}{EI}\frac{1}{p},
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& p^4Y(p) - p^2y'(0) - y'''(0) = \tfrac{w_0}{EI}\tfrac{1}{p}\\
\Leftrightarrow\ & Y(p) = \tfrac{w_0}{EI}\tfrac{1}{p^5} + \tfrac{y'(0)}{p^2} + \tfrac{y'''(0)}{p^4}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'expresion de $y(x)$:

$$y(x) = \frac{w_0}{EI}\frac{x^4}{4!} + xy'(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0). \tag{1}$$

Il reste donc à déterminer $y'(0)$ et $y'''(0)$. Pour cela, on va utiliser les deux conditions aux limites non exploitées pour le moment, à savoir :

$$\begin{array}{rl} & \left\{ \begin{array}{l} y''(L) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_0}{EI}\frac{L^2}{2} + L\,y'''(0) = 0 \\ \frac{w_0}{EI}\frac{L^3}{3!} + y'(0) + \frac{L^2}{2}y'''(0) = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y'''(0) = -\frac{w_0}{2EI}L \\ y'(0) = -\frac{w_0}{24EI}L^3 \end{array} \right. \end{array}$$

En remplacant $y'(0)$ et $y'''(0)$ dans 1 et après mise en facteur, on obtient finalement :

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x(x-L)^2(x+L)$$

Exercice 6

D'après le tables, on :

$$\mathcal{L}\left[\sin(2\omega\cdot)\right](p) = \frac{2\omega}{p^2+4\omega^2}.$$

La multiplication par t se traduisant en Laplace par une dérivation, on en déduit l'expression de la transformée de $t \mapsto t\sin(2\omega t)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\left[\cdot\sin(2\omega\cdot)\right](p) & = & -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[\sin(2\omega\cdot)\right](p) \\ & = & -\frac{d}{dp}\frac{2\omega}{p^2+4\omega^2} = \frac{4\omega p}{\left(p^2+4\omega^2\right)^2} \end{array}$$

Nota : $\mathcal{L}\left[\cdot\sin(2\omega\cdot)\right]$ est une notation rigoureuse pour ce que l'on écrit familièrement $\mathcal{L}\left[t\sin(2\omega t)\right]$, qui n'est pas correcte ; l'écriture $\cdot\sin(2\omega\cdot)$ signifie la fonction $t \mapsto t\sin(2\omega t)$.

Séries de Fourier

Exercice 1 Soit $0 < a < \pi$. Soit la fonction 2π-périodique f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x).$$

1. Après avoir tracé la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$, donner son développement en série de Fourier.
2. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}$$
3. (a) En utilisant la question 2, montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
(b) En remarquant que $\sin^2(n\pi/2)$ s'annule pour les n pairs, montrer que :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 2 Soit f une fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Tracer la fonction f sur deux ou trois périodes.
2. Développer f en série de Fourier.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Transformée de Fourier

Exercice 3 On considère l'équation aux dérivées partielles (EDP) dite "de transport" :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_t^{+*} \times \mathbb{R}_x \tag{1}$$

où c est une constante positive représentant la vitesse propagation. On adjoint à cette équation une condition initiale :

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que $u(t,.)$ admet une transformée de Fourier pour tout t. On définit la transformation de Fourier partielle par rapport à la variable x :

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

Bien sûr, toutes les propriétés vues en cours sont valables **pour la variable** x.

1. Exprimer $\widehat{u(0,x)}$ en fonction de $\widehat{u_0}$.
2. Etablir l'équation différentielle obtenue après application de transformation de Fourier à 1 .
3. Résoudre cette équation. On rappelle que la solution de $\frac{dx}{dt} = ax$, $x(0) = x_0$ est donnée par $x(t) = x_0 \, \mathrm{e}^{at}$.
4. En déduire l'expression de $u(t,x)$ solution de 1.

Transformée de Laplace

Exercice 4 Soit l'équations différentielle :

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1 \, ; \, y'(0) = -2. \end{cases} .$$

1. Ecrire l'équation algébrique obtenue après application de la transformation de Laplace à cette équation.
2. Résoudre cette équation et en déduire y.

Exercice 5 (Equation différentielle a coefficients non constants)
Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

1. (question préliminaire) Montrer la relation suivante pour tout x non nul :

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}).$$

   indic : on pourra dériver cette égalité.
2. Ecrire l'équation (différentielle) obtenue après application de la transformation de Laplace au système 2.
3. Résoudre cette équation, et en déduire la solution y de 2.
   Rappel : la dérivée de $\mathrm{Arctan}(p)$ est $\frac{1}{p^2+1}$. On admettra de plus que $\mathcal{L}\left[\frac{\sin \cdot}{\cdot}\right](p) = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{p})$.

SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1 Soit $0 < a < \pi$. Soit la fonction 2π-périodique f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x).$$

1. $b_n = 0$ car fonction paire. $a_0 = \frac{2a}{\pi}$, $a_n = \frac{2\sin(na)}{n\pi}$, $n \geqslant 1$. On a alors développement de f en série de Fourier d'après le théorème de Parseval :

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(na)}{n\pi}\cos(nx) = \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \begin{cases} 1/2 \text{ si } x = \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) \text{ sinon} \end{cases}.$$

2. L'application de l'égalité de Parseval donne (après calculs) :

$$\frac{a(\pi - a)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$$

   (a) En prenant $a = \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

   (b) On

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} &= \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2p\pi/2)}{(2p)^2}}_{=0 \text{ car } \sin(p\pi)=0} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin^2((2p+1)\pi/2)}{(2p+1)^2} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \ (\text{car } \sin^2((2p+1)\pi/2) = 1) \\ &= \frac{\pi^2}{8} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Exercice 2 Soit f une fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Fonction continue.
2. Les b_n sont nuls, $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ $n \geqslant 2$. On a donc le développement en série de Fourier :
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = x^2$$
3. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ (égalité ci-dessus en } x = 0)$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \quad \text{(égalité de Parseval)}$$

Transformée de Fourier

Exercice 3

1. $\widehat{u(0,x)}(\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$.
2. On applique la transformation de Fourier selon x à l'EDP (en supposant que ∂_t et $\widehat{\ }$ commutent) :
$$\begin{array}{ll} & \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t,\xi) = c\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(t,\xi) \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) = 2\mathrm{i}\pi\xi c\,\widehat{u}(t,\xi). \end{array}$$
3. La solution est $\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)e^{2\mathrm{i}\pi\xi ct}$
4. Par transformation de Fourier inverse (l'exponentielle se traduisant par une translation de valeur ct) :
$$u(t,x) = u_0(x - ct).$$
Cette expression montre que la solution de cette équation aux dérivées partielles est le transport de la condition initiale u_0 à la vitesse c.

Transformée de Laplace

Exercice 4 Soit l'équations différentielle :
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1\,;\, y'(0) = -2. \end{cases}.$$
Après application de la transformation de Laplace, on obtient :
$$\begin{array}{ll} & p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) = \frac{1}{p^2} \\ \Leftrightarrow & (p^2+1)Y(p) - p + 2 = \frac{1}{p^2} \\ \Leftrightarrow & Y(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1}. \end{array}$$

Les deux derniers termes sont simples à traiter : on connait l'expression de leur antécédent par Laplace avec les tables. Concernant le terme $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$, on le décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Ainsi, on a l'expression de $Y(p)$:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1} \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1}. \end{aligned}$$

En utilisant les tables, on en déduit donc l'expression de $y(t)$:

$$y(t) = (t - 3\sin t + \cos t)\, H(t).$$

Exercice 5

1. On dérive la relation :

$$0 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{l'égalité est bien vérifiée.}$$

   On a donc :

$$\frac{d}{dx}\left(-\mathrm{Arctan}(x)\right) = \frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})$$

   ce qui implique :

$$-\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) + K.$$

   La constante K vaut $-\frac{\pi}{2}$ (faire $x \to \infty$ dans l'égalité ci-dessus). L'égalité est démontrée.

2. Faisons terme à terme.

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[ty''\right](p) = -\tfrac{d}{dp}\left[p^2Y(p) - py(0) - y\prime(0)\right] \\ &\mathcal{L}\left[2y'\right](p) = 2pY(p) - 2y(0) \\ &\mathcal{L}\left[ty\right](p) = -Y'(p). \end{aligned}$$

   L'équation différentielle devient donc, après calculs :

$$\begin{aligned} & (p^2+1)Y'(p) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & Y'(p) = -\tfrac{1}{1+p^2}. \end{aligned}$$

3. On a donc :

$$Y(p) = -\mathrm{Arc}\tan(p) + C.$$

On sait que toutes les transformées de Laplace tendent vers 0 lorsque p tend vers l'infini (propriété du cours) ; on déduit donc de l'égalité ci-dessus que $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, donc $C = \frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$Y(p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan}(p) = \operatorname{Arc\,tan}(\frac{1}{p}).$$

La solution y est donc donnée par :

$$y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Equations différentielles linéaires

Céline Casenave

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Equations du premier ordre **2**
2.1 Solutions de (1) . . . 2
2.2 Résolution de l'équation homogène associée . . . 3
2.3 Recherche d'une solution particulière de (1) . . . 3
2.3.1 Méthode de la variation de la constante . . . 4
2.3.2 Dans le cas d'une équation à coefficients constants . . . 4
2.3.3 Principe de superposition . . . 5

3 Equations du second ordre **5**
3.1 Solutions de (6) . . . 6
3.2 Résolution de l'équation homogène associée . . . 6
3.3 Recherche d'une solution particulière . . . 8
3.3.1 Méthode de la variation de la constante . . . 8
3.3.2 Dans le cas d'une équation à coefficients constants . . . 8
3.3.3 Principe de superposition . . . 8

4 Systèmes d'équations du premier ordre à coefficients constants **9**
4.1 Solutions de (9) . . . 9
4.2 Résolution de l'équation homogène associée . . . 10

1 Introduction

Une équation différentielle est une équation portant sur les dérivées d'une fonction, c'est à dire une équation de la forme :

$$y^{(p)}(t) = F(t, y(t), y'(t), ..., y^{(p-1)}(t)),$$

où F est une fonction éventuellement non linéaire, $y^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y et $p \in \mathbb{N}^*$ est appelé **ordre de l'équation**.

Dans le cas général on ne peut résoudre analytiquement une telle équation et on fera appel à une résolution numérique (cf deuxième partie du cours sur les schémas numériques). Dans cette première partie, on ne s'intèresse qu'aux équations différentielles dites "linéaires", c'est à dire ne comportant que des termes de la forme $a_n(t)y^{(n)}(t)$ et $b(t)$. On verra qu'il est alors parfois possible de donner l'expression analytique des solutions.

2 Equations du premier ordre

On s'intéresse dans un premier temps aux équations différentielles du premier ordre, c'est à dire aux équations de la forme :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \forall t \in I, \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. On recherche les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (1) continûment dérivables.

Terminologie : On dit que l'équation (1) est **homogène** si $b(t) = 0, \forall t \in I$.
On dit que l'équation (1) est **à coefficients constants** si $a(t) = \text{cte}, \forall t \in I$.

Remarque : Un problème qui se pose souvent en pratique consiste à trouver la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (1) continûment dérivable et telle que $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in I$.

2.1 Solutions de (1)

Avant de chercher à résoudre (1), il faut s'assurer de l'existence de solutions, ce que permet le théorème suivant.

Théorème 1

Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (1) continûment dérivable et telle que $y(t_0) = y_0$.

Démonstration : Admise. ■

L'existence de solutions étant assurée, on s'intéresse à présent à la résolution de (1). Pour cela, on a le résultat suivant sur lequel est basée la méthode de résolution pratique des équations différentielles :

Proposition 2

Soit $\hat{y}$ une solution particulière de (1). Les solutions de (1) s'écrivent alors, pour tout $t \in I$:

$$y(t) = \hat{y}(t) + \bar{y}(t),$$

*avec $\bar{y}$ solution de l'équation dite "**homogène associée**" :*

$$y'(t) = a(t)y(t),\ \forall t \in I. \tag{2}$$

Démonstration : Soient $\hat{y}_1$ et $\hat{y}_2$ deux solutions particulières de (1). Alors :

$$\hat{y}_1'(t) = a(t)\hat{y}_1(t) + b(t) \text{ et } \hat{y}_2'(t) = a(t)\hat{y}_2(t) + b(t),$$

d'où

$$\hat{y}_1'(t) - \hat{y}_2'(t) = a(t)(\hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t)).$$

On a donc : $\hat{y}_1(t) = \hat{y}_2(t) + \bar{y}(t)$ avec $\bar{y}(t) := \hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t)$ solution de (2). ■

Pour trouver les solutions de (1) il faut donc trouver les solutions de l'équation homogène associée (2) et exhiber une solution particulière de (1).

2.2 Résolution de l'équation homogène associée

Proposition 3

Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$y'(t) = a(t)y(t),\ \forall t \in I,$$

forment un sous espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ des fonctions continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}$. Elles s'écrivent, pour tout $t \in I$:

$$y(t) = Ce^{A(t)},\ C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : Soit y solution de (2). Alors, y est solution de $e^{-A(t)}\left(y'(t) - a(t)y(t)\right) = 0 \iff (e^{-A(t)}y(t))' = 0 \iff e^{-A(t)}y(t) = C$, avec $C \in \mathbb{R}$. ■

Cas particulier : $y'(t) = cy(t)$ avec $c \in \mathbb{R}$ a pour solutions Ce^{at}, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple : $y'(t) = (1+t)y(t)$ admet pour solutions $y(t) = Ce^{t+\frac{t^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

2.3 Recherche d'une solution particulière de (1)

Trouver une solution particulière de (1) n'est pas toujours évident. On peut parfois en trouver une "par intuition" comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple : On considre l'équation $y'(t) = (1+t)y(t) - t^2 - t + 1$. On peut aisément vérifier que $\hat{y}(t) = t$ est une solution particulière de cette équation. Les solutions s'écrivent alors : $y(t) = t + Ce^{t+\frac{t^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Dans le cas général cependant, on préfèrera utiliser la **méthode dite "de la variation de la constante"** ou certains autres résultats (par exemple dans le cas particulier d'une équation à coefficients constants et second membre sous la forme d'un produit d'un polynome et d'une exponentielle) pour exhiber une solution particulière. Le principe de superposition peut également être très utile en pratique.

2.3.1 Méthode de la variation de la constante

Cette méthode systématique consiste à rechercher une solution particulière de (1) sous la forme :

$$\hat{y}(t) = C(t)e^{A(t)},$$

et à montrer que C vérifie alors une équation du premier ordre facile à résoudre car ne comportant qu'un terme en C' (et pas de terme en C).

Exemple : On considère l'équation

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) + 1 \tag{3}$$

et on cherche la solution de (3) sur $[1, +\infty[$ telle que $y(1) = 1$.
Les solutions de l'équation homogène associée $y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)$ sont données par :

$$y(t) = Ce^{-\ln|t|} = -\frac{C}{t},\ C \in \mathbb{R},\ t \in [1, +\infty[.$$

Essayons maintenant de trouver une solution particulière de (3) en utilisant la méthode de la variation de la constante. On cherche donc $\hat{y}$ sous la forme $\hat{y}(t) = -\dfrac{C(t)}{t}$. Comme $\hat{y}$ est solution de (3), on a :

$$\hat{y}'(t) = -\frac{1}{t}\hat{y}(t) + 1. \tag{4}$$

Or, $\hat{y}'(t) = -\frac{C'(t)}{t} + \frac{C(t)}{t^2}$, d'où, en remplaçant dans (4) :

$$-\frac{C'(t)}{t} + \frac{C(t)}{t^2} = -\frac{1}{t}(-\frac{C(t)}{t}) + 1 \Longleftrightarrow -\frac{C'(t)}{t} = 1 \Longleftrightarrow C'(t) = -t \Longleftrightarrow C(t) = -\frac{t^2}{2} + \text{cte}.$$

En fixant (de manière arbitraire) la constante à 0, on obtient alors comme solution particulière de (3) la fonction :

$$\hat{y}(t) = (-\frac{t^2}{2})(-\frac{1}{t}) = \frac{t}{2}.$$

L'ensemble des solutions de (3) sur $[1, +\infty[$ s'écrivent donc :

$$y(t) = -\frac{C}{t} + \frac{t}{2},\ C \in \mathbb{R},$$

et la solution de (3) telle que $y(1) = 1$ est définie par : $y(t) = \frac{1}{2t} + \frac{t}{2}$ ($C = -\frac{1}{2}$).

2.3.2 Dans le cas d'une équation à coefficients constants

Dans le cas particulier où l'équation (1) est à coefficients constants :

$$y'(t) = ay(t) + b(t), \tag{5}$$

on a le résultat intéressant suivant :

Proposition 4

Si $b(t) = Q(t)e^{rt}$ où r est un réel et Q un polynôme à coefficients réels de degré q, alors (5) admet une solution de la forme

$$\hat{y}(t) = P(t)e^{rt},$$

où P est un polynôme de degré p avec :
► *$p = q$ si $r \neq a$,*
► *$p = q + 1$ si $r = a$.*

Démonstration : La fonction $t \longmapsto e^{rt}$ étant continûment dérivable et non nulle sur I, on peut rechercher une solution de (5) sous la forme : $\hat{y}(t) = u(t)e^{rt}$. On a :

$$\hat{y}'(t) = a\,\hat{y}(t) + b(t) \Longleftrightarrow u'(t)e^{rt} + u(t)re^{rt} = a\,u(t)e^{rt} + Q(t)e^{rt} \Longleftrightarrow u'(t) + u(t)(r-a) = Q(t).$$

- si $r = a$, alors u est une primitive de Q c'est à dire un polynome de degré $q+1$,
- si $r \neq a$, alors si u polynome de degré p, par identification des coefficients on a $p = q$. ■

Exemple : $y(t) = -(t^2 + 2t + 3)e^t$ est une solution particulière de $y'(t) = 2y(t) + (t^2+1)e^t$

2.3.3 Principe de superposition

Le principe de superposition s'énonce de la manière suivante :

Proposition 5

Soit y_1 (respectivement y_2) une solution sur I de

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t) \text{ (respectivement } y'(t) = a(t)y(t) + g(t)),$$

alors, pour tout C_1, $C_2 \in \mathbb{C}$, $C_1y_1 + C_2y_2$ est solution de

$$y'(t) = a(t)y(t) + C_1f(t) + C_2g(t).$$

Démonstration : évidente. ■

Pour la recherche d'une solution particulière, ce principe peut être très utile.

Exemple : Dans le cas d'une équation à coefficients constants où $b(t) = \cos(\omega t)Q(t)e^{zt}$ ou $b(t) = \sin(\omega t)Q(t)e^{zt}$, on pourra utiliser les formules d'Euler :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \text{ et } \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i},$$

et trouver une solution particulière pour chacune des équations suivantes :

$$y'(t) = ay(t) + Q(t)e^{zt}e^{i\omega t} \text{ et } y'(t) = ay(t) + Q(t)e^{zt}e^{-i\omega t}$$

en utilisant la proposition 4. Grâce au principe de superposition on pourra alors exhiber une solution particulière de $y'(t) = ay(t) + b(t)$.

3 Equations du second ordre

On ne traitera ici que le cas particulier des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, c'est à dire des équations de la forme :

$$y''(t) = a_1y'(t) + a_0y(t) + b(t), \tag{6}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a_1, a_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On recherche les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (6) deux fois continûment dérivables.

Comme dans le cas des équations du premier ordre, la résolution de (6) passera par la résolution de l'équation homogène associée et la recherche d'une solution particulière.

Remarque : Dans le cas d'équations différentielles du second ordre à coefficients non constants, la résolution de (6) n'est pas systématique. Pour exhiber la solution analytique de l'ensemble des solutions de (6), il faut au préalable connaitre une solution particulière de l'équation homogène associée, ce qui est en général impossible.

3.1 Solutions de (6)

L'existence de solutions de (6) fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 6

Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (6) deux fois continûment dérivable et telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Démonstration : Admise. ■

De même que dans le cas des équations du premier ordre, les solutions de (6) sont obtenues comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Proposition 7

Soit $\hat{y}$ une solution particulière de (6). Les solutions de (6) s'écrivent alors, pour tout $t \in I$:

$$y(t) = \hat{y}(t) + \bar{y}(t),$$

*avec $\bar{y}$ solution de l'équation dite "**homogène associée**" :*

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t),\ \forall t \in I. \tag{7}$$

Démonstration : Similaire à celle de la proposition 2. ■

3.2 Résolution de l'équation homogène associée

Théorème 8

*Soient r_1 et r_2 les deux racines (disctinctes ou confondues, réelles ou complexes) de l'**équation caractéristique** de (6) :*

$$r^2 - a_1 r - a_0 = 0, \tag{8}$$

et $\Delta = a_1^2 + 4a_0$ son discriminant.
Les solutions de (7) forment un sous espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions deux fois continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}$.
Elles sont définies par :

- *si $\Delta > 0$ (r_1 et r_2 racines distinctes réelles) :*

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

– *si* $\Delta = 0$ *(racine réelle double* $r_1 = r_2 = \alpha$*) :*

$$y(t) = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

– *si* $\Delta < 0$ *(*r_1 *et* r_2 *racines complexes conjuguées :* $\overline{r_2} = r_1 = \alpha + i\beta$*) :*

$$y(t) = \left(C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)\right) e^{\alpha t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : La fonction $t \longmapsto e^{r_1 t}$ étant deux fois dérivable et non nulle sur I, on peut chercher les solutions sur I de (7) sous la forme $y(t) = u(t)e^{r_1 t}$. On a alors :

$$y'(t) = \left(u'(t) + r_1 u(t)\right) e^{r_1 t} \text{ et } y''(t) = \left(u''(t) + 2r_1 u'(t) + r_1^2 u(t)\right) e^{r_1 t},$$

d'où :

$$\begin{array}{rc} & y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ \iff & (u''(t) + 2r_1 u'(t) + r_1^2 u(t))e^{r_1 t} = \left[a_1(u'(t) + r_1 u(t)) + a_0 u(t)\right] e^{r_1 t} \\ \iff & \left[u''(t) + (2r_1 - a_1)u'(t) + \left(r_1^2 - a_1 r_1 - a_0\right) u(t)\right] e^{r_1 t} = 0, \end{array}$$

soit, puisque r_1 racine de (8) et $e^{r_1 t} > 0$:

$$u''(t) + (2r_1 - a_1)u'(t) = 0.$$

On pose $\Delta = a_1^2 + 4a_0$ et on distingue alors 3 cas différents :

– si $\Delta > 0$ alors les racines de (8) sont $\frac{a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc $r_1 \neq \frac{a_1}{2} \Longrightarrow 2r_1 - a_1 \neq 0$. En posant $z = u'$, on se ramène donc à l'équation du premier ordre suivante :

$$z'(t) + (2r_1 - a_1)z(t) = 0,$$

dont les solutions sont données par $z(t) = Ce^{-(2r_1 - a_1)t}$, $C \in \mathbb{R}$. Les solutions u sont donc données par les primitives de z c'est à dire par :

$$u(t) = -\tfrac{1}{(2r_1 - a_1)} Ce^{-(2r_1 - a_1)t} + C_1,\ C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

On a alors :

$$y(t) = \left(-\tfrac{1}{(2r_1 - a_1)} Ce^{-(2r_1 - a_1)t} + C_1\right) e^{r_1 t} = -\tfrac{1}{(2r_1 - a_1)} Ce^{(a_1 - r_1)t} + C_1 e^{r_1 t},$$

soit, en posant $C_2 = -\frac{1}{(2r_1 - a_1)} C$ et puisque $r_2 = a_1 - r_1$:

$$y(t) = C_2 e^{r_2 t} + C_1 e^{r_1 t}.$$

– si $\Delta = 0$ alors $r_1 = r_2 = \frac{a_1}{2}$, d'où $u''(t) = 0$ et donc $u(t) = C_1 t + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

– si $\Delta < 0$ alors $\overline{r_1} = r_2$. La démarche est la même que dans le cas $\Delta > 0$, la seule différence étant que, comme r_1 et r_2 sont complexes, C_1 et C_2 le sont aussi. Comme l'on cherche des solutions à valeurs réelles, on prendra $\overline{C_1} = C_2$. Ainsi les solutions s'écriront :

$$y(t) = \overline{C_1} e^{\overline{r_1} t} + C_1 e^{r_1 t} = 2\,\mathrm{Re}(C_1 e^{r_1 t}) \in \mathbb{R},$$

c'est à dire :

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{Re}(C_1) + i\,\mathrm{Im}(C_1)\right) e^{(\mathrm{Re}(r_1) + i\,\mathrm{Im}(r_1))t}\right) \\ & = & 2\left[\mathrm{Re}(C_1)\cos(\mathrm{Im}(r_1)t) - \mathrm{Im}(C_1)\sin(\mathrm{Im}(r_1)t)\right] e^{\mathrm{Re}(r_1)t} \\ & = & \left[\mu_2 \cos(\mathrm{Im}(r_1)t) + \mu_1 \sin(\mathrm{Im}(r_1)t)\right] e^{\mathrm{Re}(r_1)t} \end{array}$$

avec $\mu_1 = -2\,\mathrm{Im}(C_1)$ et $\mu_2 = 2\,\mathrm{Re}(C_1)$. ■

3.3 Recherche d'une solution particulière

De même que précédemment, la recherche d'une solution particulière de (6) pourra se faire de différentes manières.

3.3.1 Méthode de la variation de la constante

Soit (v_1, v_2) une base de l'espace des solutions de l'équation homogène (7) : les solutions de (7) s'écrivent donc $y(t) = C_1 v_1(t) + C_2 v_2(t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. La méthode de la variation de la constante dans le cas d'une équation d'ordre 2 consiste à chercher une solution particulière de la forme :

$$\hat{y}(t) = C_1(t)v_1(t) + C_2(t)v_2(t),$$

telle que :

$$\begin{cases} C_1'(t)v_1(t) + C_2'(t)v_2(t) = 0 \\ C_1'(t)v_1'(t) + C_2'(t)v_2'(t) = b(t). \end{cases}$$

Remarque : Ce résultat est à retenir car il n'est pas évident à retrouver !

3.3.2 Dans le cas d'une équation à coefficients constants

Pour trouver une solution particulière de (6), on pourra également utiliser le résultat suivant lorsque b_0 est le produit d'un polynome et d'une exponentielle :

Proposition 9

Si $b_0(t) = Q(t)e^{rt}$ où z est un réel et Q un polynôme à coefficients réels de degré q, alors (6) admet une solution de la forme :

$$\hat{y}(t) = P(t)e^{rt},$$

où P est un polynôme de degré p avec :

- ▶ *$p = q$ si r **n'est pas racine** de l'équation caractéristique (8),*
- ▶ *$p = q + 1$ si r est **racine simple** de l'équation caractéristique (8),*
- ▶ *$p = q + 2$ si r est **racine double** de l'équation caractéristique (8).*

Démonstration : Similaire à celle de la proposition 4. ■

3.3.3 Principe de superposition

Le principe de superposition reste également valable. On a :

Proposition 10

Soit y_1 (respectivement y_2) une solution sur I de

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) + f(t) \text{ (respectivement } y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) + g(t)),$$

alors, pour tout C_1, $C_2 \in \mathbb{C}$, $Cy_1 + C_2 y_2$ est solution de

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) + C_1 f(t) + C_2 g(t).$$

Démonstration : Evidente. ■

4 Systèmes d'équations du premier ordre à coefficients constants

On considère ici un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, c'est à dire un système de la forme :

$$\forall t \in I, \begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + ... + a_{1n}y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + ... + a_{nn}y_n(t) + b_1(t) \end{cases}$$

qui, sous forme matriciel, s'écrit :

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \forall t \in I, \tag{9}$$

avec

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ et } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Remarque : Toute équation différentielle linéaire d'ordre p :

$$y^{(p)}(t) = a_{p-1}y^{(p-1)}(t) + ... + a_0(t)y(t) + b(t), \ t \in I, \tag{10}$$

peut s'écrire sous la forme d'un système de p équations différentielles linéaires du premier ordre.

Exemple : avec $p = 3 : y'''(t) = a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) + b(t)$ s'écrit sous la forme (9) avec $n = 3$ et :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}, \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}.$$

On cherche les solutions $Y : I \to \mathbb{R}^n$ de (9) continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Les résultats établis dans le cas des équations d'ordre 1 et 2 se généralisent au cas d'un système différentiel.

4.1 Solutions de (9)

Théorème 11

On considère le système d'équations linéaires (9) avec I intervalle de $\mathbb{R}$, et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues.
Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution Y de (9) définie sur I tout entier telle que $Y(t_0) = Y_0$.

Démonstration : Admise. ■

Proposition 12

Soit $\hat{Y}$ une solution particulière de (9). Les solutions de (9) s'écrivent alors, pour tout $t \in I$:

$$Y(t) = \hat{Y}(t) + \bar{Y}(t),$$

avec $\bar{Y}$ solution de l'équation homogène associée :

$$Y'(t) = A(t)Y(t),\ \forall t \in I. \tag{11}$$

Démonstration : Soient $\hat{Y}$ et $\bar{Y}$ deux solutions particulières de (9). Alors :

$$\hat{Y}'(t) = A(t)\hat{Y}(t) + B(t) \text{ et } \bar{Y}'(t) = A(t)\bar{Y}(t) + B(t),$$

d'où

$$\bar{Y}'(t) - \hat{Y}'(t) = A(t)(\bar{Y}(t) - \hat{Y}(t)).$$

On a donc : $\bar{Y} = \hat{Y} + Y$ avec $Y := \bar{Y} - \hat{Y}$ solution de (11). ■

4.2 Résolution de l'équation homogène associée

Proposition 13

Soit $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène :

$$Y'(t) = A(t)Y(t),\ \forall t \in I, \tag{12}$$

est un sous espace vectoriel de dimension n de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ des fonctions continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : Soient Y^1 et Y^2 deux solutions de (12) et C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}(C_1Y^1 + C_2Y^2)'(t) &= C_1Y^{1\prime}(t) + C_2Y^{2\prime}(t)\\ &= C_1A(t)Y^1(t) + C_2A(t)Y^2(t)\\ &= A(t)\left(C_1Y^1 + C_2Y^2\right)(t).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}_0$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout $t_0 \in I$ fixé, l'application $\Phi_{t_0} : Y \in \mathcal{S}_0 \longrightarrow Y(t_0) \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme : la linéarité se démontre de manière triviale ; le fait que Φ_{t_0} soit bijective découle du théorème 11. On a donc $\mathcal{S}_0$ de dimension finie et $\dim(\mathcal{S}_0) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. ■

Cela signifie que si l'on a n solutions linéairement indépendantes $Y^1, ..., Y^n$ de (12), on connait toutes les solutions de (12) qui sont obtenues par combinaison linéaire des Y^i :

$$C_1Y^1 + ... + C_nY^n,\ C_i \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas particulier d'un système différentiel homogène à coefficients constants, on a le résultat suivant qui généralise celui de la proposition 3 :

Proposition 14

Les solutions de l'équation homogène :

$$Y'(t) = AY(t),\ \forall t \in I,$$

s'écrivent, pour tout $t \in I$:

$$Y(t) = e^{At}C,\ C \in \mathbb{R}^n,$$

où e^{At} est l'exponentielle de la matrice $B := At$ définie par $e^B := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}B^k$.

Démonstration : Admise. ■

En pratique, le calcul de l'exponentielle d'une matrice A n'est pas évident. Dans le cas où A est diagonale ou diagonalisable, on a cependant les résultats pratiques suivants (cf DM d'Algèbre linéaire) :

- si $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}$ alors $e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}$
- si $A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}$ (i.e. A diagonalisable) alors $e^A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} P^{-1}$.

EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Exercice 1

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du premier ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$ pour les valeurs de t_0 et de y_0 précisées entre parenthèses.

1. $y'(t) - 4y(t) = 12t + 1$ $(t_0 = 0,\ y_0 = 0)$
2. $y'(t) + 2y(t) = 2te^{-2t}$ $(t_0 = 0,\ y_0 = 2)$
3. $ty'(t) = 2y(t) + t^3$ $(t_0 = 1,\ y_0 = 3)$

EQUATIONS DU SECOND ORDRE ORDRE

Exercice 2

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du second ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$, $y'(t_1) = y_1$ pour les valeurs de t_0, t_1, y_0 et y_1 précisées entre parenthèses.

1. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}(t + 2)$ $(t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ y_0 = 3,\ y_1 = -2)$
2. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 6$ $(t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ y_0 = 1,\ y_1 = 0)$
3. $y''(t) + y(t) = \tan^2(t)$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Remarque : pour la question 3 on admettra que les primitives de $t \longmapsto \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$ et de $t \longmapsto -\frac{\sin^3(t)}{\cos^2(t)}$ sont données par :

$$t \longmapsto -\sin(t) + \ln(\tan(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{t}{2})) + \text{cte et } t \longmapsto -\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} + \text{cte.}$$

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Exercice 3

Trouver l'ensemble des solutions réelles du système différentielle d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t). \end{aligned}$$

Equations du premier ordre

Exercice 1

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du premier ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$ pour les valeurs de t_0 et de y_0 précisées entre parenthèses.

1. $y'(t) - 4y(t) = 12t + 1$ $(t_0 = 0,\ y_0 = 0)$
2. $y'(t) + 2y(t) = 2te^{-2t}$ $(t_0 = 0,\ y_0 = 2)$
3. $ty'(t) = 2y(t) + t^3$ $(t_0 = 1,\ y_0 = 3)$

Correction

1. Equation homogène associée : $y'(t) = 4y(t)$ de solutions Ce^{4t}, $C \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants avec $b(t) = Q(t)e^{rt}$, où $Q(t) = 12t + 1$ et $r = 0 \neq 4$.
   On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = P(t)$ avec $P(t) = k_1 t + k_0$ polynome de degré 1 (égal à celui de Q).
   On a :

$$\hat{y}'(t) - 4\,\hat{y}(t) = 12t + 1 \Leftrightarrow k_1 - 4(k_1 t + k_2) = 12t + 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_1 - 4k_2 = 1 \\ -4k_1 = 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_2 = -1 \\ k_1 = -3 \end{array} \right.$$

   d'où $\hat{y}(t) = -3t - 1$.
   Solution générale : $y(t) = Ce^{4t} - 3t - 1$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).
   La solution particulière telle que $y(0) = 0$ est $y(t) = e^{4t} - 3t - 1$ $(C = 1)$.

2. Equation homogène associée : $y'(t) = -2y(t)$ de solutions Ce^{-2t}, $C \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants avec $b(t) = Q(t)e^{rt}$, où $Q(t) = 2t$ et $r = -2$.
   On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = P(t)e^{-2t}$ avec $P(t) = k_2 t^2 + k_1 t + k_0$ polynome de degré 2 (égal à celui de $Q + 1$).
   On a :

$$\hat{y}'(t) + 2\hat{y}(t) = 2te^{-2t} \Leftrightarrow (2k_2 t + k_1) = 2t \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2k_2 = 2 \\ k_1 = 0 \end{array} \right.$$

   d'où $\hat{y}(t) = (t^2 + \text{cte})\, e^{-2t}$.
   Solution générale : $y(t) = (C + t^2)e^{-2t}$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).
   La solution particulière telle que $y(0) = 2$ est $y(t) = (2 + t^2)e^{-2t}$ $(C = 2)$.

3. $ty'(t) = 2y(t) + t^3 \iff y'(t) = \frac{2}{t}y(t) + t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.
   Equation homogène associée : $y'(t) = \frac{2}{t}y(t)$ de solutions $Ce^{2\ln|t|} = Ct^2$, $C \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 1 à coefficients variables : on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière. On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = C(t)t^2$.
   On a :
   $$\hat{y}'(t) = \frac{2}{t}\hat{y}(t) + t^2 \Leftrightarrow C'(t)t^2 = t^2 \Leftrightarrow C(t) = t + c,\ c \in \mathbb{R},$$
   d'où, pour $c = 0$ (cas le plus simple), $\hat{y}(t) = t^3$.
   Solution générale : $y(t) = Ct^2 + t^3$ (solutions définies sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ ou de $\mathbb{R}_-^*$).
   La solution particulière telle que $y(1) = 3$ est $y(t) = 2t^2 + t^3$ ($C = 2$).

Equations du second ordre ordre

Exercice 2

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du second ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$, $y'(t_1) = y_1$ pour les valeurs de t_0, t_1, y_0 et y_1 précisées entre parenthèses.

1. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}(t + 2)$ ($t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $y_0 = 3$, $y_1 = -2$)
2. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 6$ ($t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$)
3. $y''(t) + y(t) = \tan^2(t)$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Remarque : pour la question 3 on admettra que les primitives de $t \longmapsto \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$ et de $t \longmapsto -\frac{\sin^3(t)}{\cos^2(t)}$ sont données par :

$$t \longmapsto -\sin(t) + \ln(\tan(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{t}{2})) + \text{cte et } t \longmapsto -\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} + \text{cte.}$$

Correction

1. Equation homogène associée : $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$.
   Equation caractéristique : $r^2 + 2r + 2 = 0$
   $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Longrightarrow r_1 = -1 + i = \overline{r_2}$.
   Les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent donc :
   $y(t) = (C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t))\, e^{-t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 2 à coefficients constants avec $b(t) = Q(t)e^{rt}$, où $Q(t) = t + 2$ et $r = -1 \neq -1 \pm i$.
   On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = P(t)e^{rt}$ avec $P(t) = k_1 t + k_0$ polynome de degré 1 (égal à celui de Q).
   On a :
   $$\hat{y}'(t) = (-k_1 t - k_0 + k_1)e^{-t} \text{ et } \hat{y}''(t) = (k_1 t + k_0 - 2k_1)e^{-t},$$

d'où

$$\hat{y}''(t) + 2\hat{y}'(t) + 2\hat{y}(t) = e^{-t}(t+2) \Leftrightarrow k_1 t + k_0 = t + 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_0 = 2 \end{array} \right.$$

d'où $\hat{y}(t) = (t+2)e^{-t}$.

Solution générale : $y(t) = (C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + t + 2)\, e^{-t}$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).

La solution particulière telle que $y(0) = 3$ et $y'(t) = -1$ est $y(t) = (\cos(t) + t + 2)\, e^{-t}$ ($C_1 = 0$ et $C_2 = 1$).

2. Equation homogène associée : $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$.
Equation caractéristique : $r^2 + 2r - 3 = 0$
$\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 16 > 0 \Longrightarrow r_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$.
Les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent donc : $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : le second membre étant constant, on cherche une solution constante (pourquoi se compliquer la vie !). En effet, si $\hat{y}(t) = \text{cte}$, alors $\hat{y}''(t) = \hat{y}'(t) = 0$ et

$$\hat{y}''(t) + 2\hat{y}'(t) - 3\hat{y}(t) = 6 \Longleftrightarrow -3\hat{y}(t) = 6 \Longleftrightarrow \hat{y}(t) = -2.$$

Solution générale : $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} - 2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).
La solution particulière telle que $y(0) = 3$ et $y'(t) = -1$ est $y(t) = \frac{9}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-3t} - 2$ ($C_1 = \frac{9}{4}$ et $C_2 = \frac{3}{4}$).

3. Equation homogène associée : $y''(t) + y(t) = 0$.
Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$ de racines $r_1 = i = \overline{r_2}$.
Les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent donc : $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : on utilise ici la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = C_1(t)\sin(t) + C_2(t)\cos(t)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos(t) = 0 \\ C_1'(t)\cos(t) - C_2'(t)\sin(t) = \tan^2(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos(t) = 0 \\ C_1'(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = \tan^2(t)\cos(t) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_2'(t) = -\frac{\sin^3(t)}{\cos^2(t)} \\ C_1'(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_2(t) = -\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} + \text{cte} \\ C_1(t) = -\sin(t) + \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2})) + \text{cte} \end{array} \right.$$

d'où, en prenant les constantes d'intégration égales à 0, $\hat{y}(t) = \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}))\sin(t) - 2$
Solution générale : $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}))\sin(t) - 2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (solutions définies sur tout $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

Systèmes différentiels

Exercice 3

Trouver l'ensemble des solutions réelles du système différentielle d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t). \end{aligned}$$

Correction

Le système différentiel se met sous la forme matriciel :

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

C'est un système différentiel homogène dont les solutions s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^A C,$$

avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $C \in \mathbb{R}^2$.

Calcul de e^A : on cherche d'abord à diagonaliser A.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Il y a donc deux valeurs propres disctinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ et on montre que :

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Introduction aux méthodes de résolution numérique des équations différentielles

E. Montseny

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Schémas numériques **1**
2.1 Equations différentielles non linéaires 1
2.2 Schéma d'Euler 2
2.3 Quelques notions importantes 2
2.4 Applications et démo Matlab 3

1 Introduction

Déterminer la solution analytique d'une équation différentielle est à tout point de vue ce qu'il y a de plus intéressant ; il ne faut pas pour autant se voiler la face : en dehors des équations différentielles linéaires à coefficients constants ou d'ordre peu élevé, on est en général bien incapable de résoudre analytiquement une équation différentielle, *a foriori* lorsqu'elle est **non linéaire**.

On doit alors faire appel à des méthodes de résolution numérique, pour calculer une solution approchée au moyen d'ordinateurs. Cette méthode de résolution fait appel à des **schémas numériques**, qui sont des algorithmes de calcul permettant de résoudre numériquement une équation différentielle (i.e. en calculer une solution approchée). On présente dans ce petit court les bases de la construction de schémas numériques pour la résolution d'équations différentielles d'ordre 1.

2 Schémas numériques

2.1 Equations différentielles non linéaires

Si l'on voulait être vraiment cohérent, on ne devrait pas préciser le terme "non linéaires". Une équation différentielle, dans son écriture générale, est non linéaire, le préciser est redondant. Les équations différentielles linéaires sont un type particulier d'équations différentielles.

Une équation différentielle d'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction régulière. On se propose de résoudre numériquement des équations de ce type, c'est-à-dire approcher la solution $y(t)$ sur un ensemble dénombrable d'instants t_n, au moyen

de calculs simples effectués par un ordinateur. Autrement dit : on discrétise le temps en instants successifs $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$, tels que $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ (Δt étant appelé le **pas de discrétisation**). On cherche alors à approcher $y(t_1), y(t_2), ..., y(t_n), ...$ par une suite de nombres $y_1, y_2, ..., y_n, ...$

2.2 Schéma d'Euler

C'est sans conteste le plus simple et le plus intuitif des schémas numériques. L'idée de la méthode est simple : approcher le terme dérivé $y'(t)$ de (1) par une simple différence divisée :

$$y'(t_n) \simeq \frac{y(t_n + \Delta t) - y(t_n)}{\Delta t},$$

Dit autrement, cette approximation consiste à prendre la tengeante à la courbe à t_n et considérer cette valeur pour dérivée jusqu'en t_{n+1}. En injectant cette approximation dans (1), on obtient :

$$\frac{y(t_n + \Delta t) - y(t_n)}{\Delta t} \simeq f(t_n, y(t_n)),$$

d'où le schéma de résolution numérique :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\, f(t_n, y_n). \tag{2}$$

Ainsi, pour résoudre (1) numériquement, il suffit d'utiliser cette relation de proche en proche :
- Initialiser y_0
- Calculer y_{n+1} à partir de la valeur de y_n avec (2)
- $n = n + 1$

Remarque : Ce schéma est dit **explicite**, car la quantité y_{n+1} est exprimée explicitement en fonction de y_n, et qualifié de **schéma à un pas**, ce qui signifie que le calcul de y_{n+1} n'utilise que la valeur y_n à l'instant précédent (une méthode à deux pas utiliserait y_n et y_{n-1} etc.).

Remarque : Ce schéma est intimement lié à la méthode de quadrature des rectangles. En fait, la plupart des schémas numériques de résolution d'EDO sont liés à une méthode de quadrature (ou à une combinaison de plusieurs méthodes).

Il existe de nombreux autres schémas numériques, plus précis que le schéma d'Euler, qui ne seront pas présentés faute de temps. Citons par exemple le schéma du point milieu, le schéma de Heun, ou encore la classique famille des méthodes de Runge-Kutta.

2.3 Quelques notions importantes

1. **Erreur de consistance** : Il s'agit de l'erreur que génére l'utilisation du schéma numérique sur un pas. Cette erreur doit bien évidemment rester raisonnable si on veut espérer obtenir une solution approchée y_n proche de la solution exacte (inconnue) $y(t_n)$. Un schéma **consistant** est un schéma numérique qui est tel que cette erreur tend vers 0 lorsque l'on discrétise le temps de plus en plus fin (i.e. $\Delta t \to 0$). En effet, il faut noter un point important : plus le pas de temps Δt choisi est grand, moins le schéma est précis (on approche une dérivée par la tangente sur une "longue" période). Le schéma d'Euler est consistant.

2. Pour un pas de temps Δt fixé, plus un schéma est précis (plus l'erreur est petite), mieux c'est : ceci est traduit par **l'ordre du schéma numérique** (on ne s'attardera pas dessus). Plus un schéma est d'ordre faible, plus il faudra prendre un pas de temps petit pour avoir une solution approchée précise (et donc plus il faudra faire de calculs...). Le schéma d'Euler est d'ordre 1 et est donc peu précis.
3. **Stabilité**. Toute personne ayant programmé un schéma numérique a été confronté au problème de la stabilité, qui se traduit par une solution numérique qui tend vers l'infini alors qu'elle devrait pas (on dit qu'elle explose)[1]. On dit que le schéma est instable. Ceci peut-être dû soit à une erreur de programmation, soit au schéma lui-même, qui accumule les erreurs (de consistance) de manière incontrôlée. Le schéma d'Euler est stable. Si un schéma est stable et consistant, la solution numérique converge vers la solution exacte de l'EDO lorsque le pas Δt tend vers 0.
4. **Pas de discrétisation**. Il peut cependant arriver qu'un schéma stable semble... instable ! Ceci est dû au pas de temps Δt choisi qui, s'il est trop grand, génère des erreurs trop importantes pour la plage de temps considérée ; il en résulte une solution approchée qui s'écarte complètement de la solution exacte et tend vers l'infini ; cela ne veut pas nécessairement dire que le schéma est instable (cf. démo Matlab : on utilise un schéma d'Euler, stable, et pourtant la solution "explose"), mais simplement qu'il faut diminuer le pas de temps pour avoir une accumulation d'erreur moins importante.

2.4 Applications et démo Matlab

Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + \cos(t) \\ y(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

dont on connait la solution analytique :

$$y(t) = \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

On va résoudre cette EDO avec un schéma d'Euler et illustrer les notions introduites. Ecrire l'algorithme de résolution de cette équation par un schéma d'Euler et le mettre en oeuvre sous Matlab.

Faire de même pour l'équation suivante (de Bernoulli) :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t\,y^2(t) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

dont la solution est :

$$y(t) = \frac{1}{1 - t + e^{-t}}.$$

[1] bien sûr, certaines équations différentielles ont une solution exacte qui tend vers l'infini, mais ce n'est pas un problème d'instabilité dans ce cas.

Examen de Mathématiques

Analyse Harmonique - Equations Différentielles

26 février 2009

Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème est approximatif. Une attention particulière sera portée aux justifications, à la clarté du raisonnement et à la rédaction.

Exercice 1 ***(5,5 points)***

Soit la fonction 2π-périodique f, définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ -1 \text{ si } -1 \leqslant x < 0 \\ 0 \text{ si } -\pi \leqslant x < -1 \text{ ou } 1 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

1. Tracer la fontion f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Quelle est la parité de la fonction ? Quels sont ses points de discontinuité ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f, puis écrire son développement en série de Fourier.

   Rappel : pour tout θ, on a la relation $\cos(\theta) - 1 = 2\sin^2(\theta/2)$, que l'on utilisera avantageusement pour la suite.
3. Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin^3(\frac{n}{2}) = \frac{\pi}{4}.$$
4. On se propose dans cette question d'établir l'égalité :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2(\frac{n}{2}) \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(n/2)}{n^2}.$$
   (a) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2(\frac{n}{2}) \frac{\sin n}{n}$.

   (b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(n/2)}{n^2}$, et constater l'égalité entre ces deux séries.

Exercice 2 ***(1,5 points)***

Cette question **ne nécessite aucun calcul**, ce qui n'empêche pas de la **justifier**. Donner la valeur des coefficients de Fourier de la fonction (2π-périodique)

$$f(t) = \sin(t) - 3\cos(5t) + 1.$$

Exercice 3 ***(4 points)***

Soit $a > 0$. On se propose dans cet exercice de calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-at^2}.$$

1. En revenant à la définition de la transformée de Fourier, calculer $\widehat{f}(0)$.
   Rappel : on pourra utiliser le résultat suivant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$.
2. Vérifier que f est solution de :

$$f'(x) = -2axf(x). \tag{1}$$

3. En appliquant la transformation de Fourier à (1), établir l'équation différentielle dont $\widehat{f}$ est solution.
4. Résoudre cette équation différentielle en y adjoignant la condition initiale $\widehat{f}(0)$ calculée en question 1, et exprimer ainsi la solution $\widehat{f}(\xi)$.

Exercice 4 ***(6 points)***

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -2y_1(t) - 3y_2(t) \end{cases} \tag{2}$$
$$\text{C.I. : } y_1(0) = 0\,;\, y_2(0) = 1.$$

On se propose de résoudre ce système de trois manières différentes (et indépendantes).

1. En utilisant la transformation de Laplace.
   (a) Etablir le système d'équations algébriques obtenu après application de la transformation de Laplace au système (2).
   (b) Résoudre ce système.
   (c) En déduire $y_1(t), y_2(t)$, solution du système différentiel (2).
   On pourra utiliser la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{p}{(p-1)(p-2)} = \frac{2}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

2. Résolution directe d'un système différentiel.
   (a) Mettre (2) sous la forme d'un système différentiel du premier ordre de la forme :

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

   où A est une matrice 2×2 à déterminer.

(b) Résoudre ce système différentiel. Pour cela, on admettra la décomposition suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. En passant par des équations du second ordre.

   (a) Montrer que y_2 est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on précisera.

   (b) Résoudre cette équation différentielle et exprimer $y_2(t)$.

   (c) En déduire $y_1(t)$.

Exercice 5 ***(4 points)***

On cherche une fonction y continûment dérivable solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \frac{1}{t^2} e^{-2t} \\ \text{C.I. : } y(1) = 0\,;\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

1. Sur quel(s) intervalles(s) peut-on chercher une solution ? Qu'est-ce qui permet d'affirmer qu'une telle solution existe ? Est-elle unique ? (justifier ces réponses !)
2. Résoudre cette équation différentielle et exprimer $y(t)$.