SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1 Soit $0 < a < \pi$. Soit la fonction 2π-périodique f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x).$$

1. Après avoir tracé la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$, donner son développement en série de Fourier.
2. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}$$
3. (a) En utilisant la question 2, montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
   (b) En remarquant que $\sin^2(n\pi/2)$ s'annule pour les n pairs, montrer que :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 2 Soit f une fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Tracer la fonction f sur deux ou trois périodes.
2. Développer f en série de Fourier.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Exercice 3 On considère l'équation aux dérivées partielles (EDP) dite "de transport" :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_t^{+*} \times \mathbb{R}_x \tag{1}$$

où c est une constante positive représentant la vitesse propagation. On adjoint à cette équation une condition initiale :

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que $u(t,.)$ admet une transformée de Fourier pour tout t. On définit la transformation de Fourier partielle par rapport à la variable x :

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-2\mathrm{i}\pi\xi x} dx.$$

Bien sûr, toutes les propriétés vues en cours sont valables **pour la variable** x.

1. Exprimer $\widehat{u(0,x)}$ en fonction de $\widehat{u_0}$.
2. Etablir l'équation différentielle obtenue après application de transformation de Fourier à 1 .
3. Résoudre cette équation. On rappelle que la solution de $\frac{dx}{dt} = ax$, $x(0) = x_0$ est donnée par $x(t) = x_0 \,\mathrm{e}^{at}$.
4. En déduire l'expression de $u(t,x)$ solution de 1.

Transformée de Laplace

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit l'équations différentielle :

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1\,;\, y'(0) = -2. \end{cases}.$$

1. Ecrire l'équation algébrique obtenue après application de la transformation de Laplace à cette équation.
2. Résoudre cette équation et en déduire y.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ (Equation différentielle a coefficients non constants)
Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

1. (question préliminaire) Montrer la relation suivante pour tout x non nul :

   $$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}).$$

   indic : on pourra dériver cette égalité.
2. Ecrire l'équation (différentielle) obtenue après application de la transformation de Laplace au système 2.
3. Résoudre cette équation, et en déduire la solution y de 2.
   Rappel : la dérivée de $\mathrm{Arctan}(p)$ est $\frac{1}{p^2+1}$. On admettra de plus que $\mathcal{L}\left[\frac{\sin\cdot}{\cdot}\right](p) = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{p})$.