Séries de Fourier

Exercice 1 (exemple du cours) Soit la fonction L-périodique g définie par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [0, \frac{L}{2}] \\ 2 - \frac{2}{L}t \text{ si } t \in [\frac{2}{L}, L] \end{cases}$$

1. Calculer ses coefficients de Fourier.
2. Etablir son développement en série de Fourier
3. Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos(2p+1) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 Soit la fonction 2π-périodique par :

$$f(x) = x \ , \ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Représenter f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Ecrire le développement en série de Fourier de f.
3. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Transformation de Fourier

Exercice 3 Soit la fonction *porte* (ou *indicatrice*) définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \chi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad .$$

1. Calculer $\widehat{\chi_{[-1,1]}}$.

2. En déduire $\widehat{\chi_{[0,1]}}$ (on évitera la calcul direct pour s'entraîner à utilise les formules du cours)
3. Soit la fonction $f_T := \frac{1}{T}\chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$.
   (a) Que vaut intuitivement la limite de f_T quand T tend vers 0 ? (un graphe avec plusieurs représentations pourra aider.
   (b) Calculer la transformée de Fourier de f_T.
   (c) En déduire, par un passage à la limite formel, que

$$\widehat{\delta}(\xi) = 1 \ \forall \xi.$$

Exercice 4

Calculer l'original de la fonction définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{e^{-2i\pi\xi}}{1+\pi^2\xi^2}.$$

Transformation de Laplace

Exercice 5 Soit une poutre de longueur L, de module d'Young E et de moment d'inertie I, soumise à une dentisté de charge uniforme w_0. Les extrémités de la poutre sont pourvues d'articulations.

La flèche $y(x)$ de la poutre vérifie :

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = \frac{w_0}{EI}. \\ y(0) = 0 = y''(0) \\ y(L) = 0 = y''(L) \end{cases}$$

Résoudre cette équation différentielle en utilisant la transformation de Laplace et donner l'expression de $y(x)$.

Exercice 6

Calculer la transformée de Laplace de f définie par :

$$f(t) = \sin(2\omega t)$$

En déduire celle de $t \mapsto t\sin(2\omega t)$.