SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1

1. La fonction est paire (faire un dessin !), donc les b_n sont tous nuls.De plus, on a :

$$a_n = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} g(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} \frac{2}{L}t\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt.$$

On a donc $a_0 = \frac{8}{L^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{L/2} = 1$. Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{L^2}\int_0^{L/2} t\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{8}{L^2}\underbrace{\left[\frac{L}{2n\pi}t\sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)\right]_0^{L/2}}_{=0} - \frac{8}{L^2}\int_0^{L/2}\frac{L}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{4}{Ln\pi}\left[\frac{L}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)\right]_0^{L/2} = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.
\end{aligned}$$

2. La fonction g est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car polynomiale par morceaux), donc d'après le théorème de Dirichlet on peut écrire l'égalité :

$$\begin{aligned}
\forall t,\ g(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right). \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) \quad \text{, séparation en } n \text{ pairs et impairs :} \\
&= \frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_{p\geqslant 0} a_{2p}\cos\left(\frac{2\pi(2p)t}{L}\right)}_{=0 \text{ car les } a_n \text{ sont nuls pour } n \text{ pairs}} + \sum_{p\geqslant 0} a_{2p+1}\cos\left(\frac{2\pi(2p+1)t}{L}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{p\geqslant 0}\frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi(2p+1)t}{L}\right).
\end{aligned}$$

3. En prenant l'égalité ci-dessus en $t = \frac{L}{2\pi}$, on obtient :

$$g(\frac{L}{2\pi}) = \frac{1}{2} + \sum_{p\geqslant 0} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2} \cos(2p+1) = \frac{1}{\pi}$$

d'où le résultat annoncé.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Soit la fonction 2π-périodique par :

$$f(x) = x \ , \ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Dessin fait en TD.
2. La fonction est impaire, donc les coefficients a_n sont nuls pour tout n. De plus :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi x \sin(nx)\, dx \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx}_{=0} \\ &= \frac{2(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

La fonction est $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car polynomiale par morceaux), donc d'après le théorème de Dirichlet on peut écrire l'égalité :

$$\begin{aligned} \forall x,\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} &= \begin{cases} 0 \text{ si } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) \ \ \text{sinon} \end{cases} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} b_n \sin(nx) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx). \end{aligned}$$

3. L'égalité ci-dessus évaluée en $x = 1$ donne :

$$f(1) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \sin n}{n},$$

d'où le résultat annoncé.

4. L'égalité de Parseval permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \ dt = \sum_{n\geqslant 1} |b_n|^2 \\ \Leftrightarrow \ & \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dt = \sum_{n\geqslant 1} \frac{4}{n^2} \\ \Leftrightarrow \ & \tfrac{1}{\pi} \tfrac{2\pi^3}{3} = 4 \textstyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}; \end{aligned}$$

il suit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Transformation de Fourier

Exercice 3 Soit la fonction *porte* (ou *indicatrice*) définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \chi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

1. Par définition :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t)\, e^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi\xi}\left(e^{2\mathrm{i}\pi\xi} - e^{-2\mathrm{i}\pi\xi}\right) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}. \end{aligned}$$

2. Bien sûr, le calcul direct est évident. On s'entraîne ici à utiliser les formules du cours. On remarque (faire des dessins!) que $\chi_{[0,1]}$ est une porte, comme $\chi_{[-1,1]}$, mais ayant subit une contraction (sa "largeur" est de 1, alors que la largeur de $\chi_{[-1,1]}$ est de 2), et un décalage (puisque $\chi_{[-1,1]}$ est centrée sur 0 alors que $\chi_{[0,1]}$ est centrée sur 1/2. Il s'agit donc d'exprimer $\chi_{[0,1]}$ en fonction de décalages et translation de $\chi_{[-1,1]}$, et d'utiliser ensuite les formules du court sur les transformées de Fourier.

   On décide (de manière arbitraire) de s'occuper d'abord de la contraction. Son facteur est 2 (pour les raisons sus-citées). Plus précisemment, on a :

   $$\chi_{[0,1]}(t) = \chi_{[0,2]}(2t).$$

   On peut donc exprimer $\widehat{\chi_{[0,1]}}$ facilement en fonction de $\widehat{\chi_{[0,2]}}$:

   $$\widehat{\chi_{[0,1]}}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{\chi_{[0,2]}}(\frac{\xi}{2}).$$

   Ensuite, on s'occupe du décalage permettant de passer de $\chi_{[-1,1]}$ à $\chi_{[0,2]}$; il s'agit d'un décalage d'une unité, soit :

   $$\chi_{[0,2]}(t) = \chi_{[-1,1]}(t-1),$$

   ce qui permet d'exprimer $\widehat{\chi_{[0,2]}}$ facilement en fonction de $\widehat{\chi_{[-1,1]}}$:

   $$\widehat{\chi_{[0,2]}}(\xi) = e^{-2\mathrm{i}\pi\xi}\,\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi).$$

   Au final, on peut écrire le résultat qui nous intéresse :

   $$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[0,1]}}(\xi) &= \frac{1}{2}\widehat{\chi_{[0,2]}}(\frac{\xi}{2}) = \frac{1}{2}e^{-2\mathrm{i}\pi\xi/2}\,\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\frac{\xi}{2}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}\pi\xi}\,\frac{\sin(2\pi\xi/2)}{\pi\xi/2} = e^{-\mathrm{i}\pi\xi}\,\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}. \end{aligned}$$

3. Soit la fonction $f_T := \frac{1}{T}\chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$.

   (a) On tombe sur un objet qui vaut $+\infty$ en 0 et 0 partout ailleurs. Il s'agit de la distribution de dirac notée δ.

   (b) Par calcul direct ou en utilisant le même procédé que ci-dessus, on o :
$$\widehat{f_T}(\xi) = \frac{\sin(\pi T\xi)}{\pi T\xi}.$$

   (c) En faisant tendre T vers 0 dans l'égalité ci-dessus, et en supposant qu'on peut inverser l'opération $\widehat{\ }$ et la limite, l'égalité ci-dessus donne :
$$\widehat{\delta}(\xi) = \lim_{T\to 0}\frac{\sin(\pi T\xi)}{\pi T\xi} = 1\ \forall\xi.$$

Exercice 4

1. On a :
$$\frac{e^{-2\mathrm{i}\pi\xi}}{1+\pi^2\xi^2} = \frac{4e^{-2\mathrm{i}\pi\xi}}{4+4\pi^2\xi^2} = e^{-2\mathrm{i}\pi\xi}\frac{2\times 2}{2^2+4\pi^2\xi^2}.$$
   On reconnait sous cette forme la transformée de $e^{-2|t|}$ décalée de 1 (du fait de la multiplication par $e^{-2\mathrm{i}\pi\xi\,1}$). Ainsi :
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{-2\mathrm{i}\pi t}}{1+\pi^2t^2}\right](t) = e^{-2|t-1|}.$$

Nota : ne pas perdre de vue que la notation $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{-2\mathrm{i}\pi t}}{1+\pi^2t^2}\right]$ est impropre car $\frac{e^{-2\mathrm{i}\pi t}}{1+\pi^2t^2}$ est un nombre et non une fonction...

Transformation de Laplace

Exercice 5 On applique la transformation de Laplace à chaque membre de l'équation différentielle (l'opération est linéaire) :
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y^{(4)}](p) &= p^4Y(p) - \underbrace{p^3y(0)}_{0} - p^2y'(0) - \underbrace{py''(0)}_{0} - y'''(0),\\
\mathcal{L}[\frac{w_0}{EI}](p) &= \frac{w_0}{EI}\mathcal{L}[1](p) = \frac{w_0}{EI}\frac{1}{p},
\end{aligned}$$
d'où :
$$\begin{aligned}
& p^4Y(p) - p^2y'(0) - y'''(0) = \tfrac{w_0}{EI}\tfrac{1}{p}\\
\Leftrightarrow\ & Y(p) = \tfrac{w_0}{EI}\tfrac{1}{p^5} + \tfrac{y'(0)}{p^2} + \tfrac{y'''(0)}{p^4}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'expresion de $y(x)$:

$$y(x) = \frac{w_0}{EI}\frac{x^4}{4!} + xy'(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0). \tag{1}$$

Il reste donc à déterminer $y'(0)$ et $y'''(0)$. Pour cela, on va utiliser les deux conditions aux limites non exploitées pour le moment, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{l} y''(L) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{w_0}{EI}\frac{L^2}{2} + L\,y'''(0) = 0 \\ \frac{w_0}{EI}\frac{L^3}{3!} + y'(0) + \frac{L^2}{2}y'''(0) = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y'''(0) = -\frac{w_0}{2EI}L \\ y'(0) = -\frac{w_0}{24EI}L^3 \end{array}\right.$$

En remplacant $y'(0)$ et $y'''(0)$ dans 1 et après mise en facteur, on obtient finalement :

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x(x-L)^2(x+L)$$

Exercice 6

D'après le tables, on :

$$\mathcal{L}\left[\sin(2\omega\cdot)\right](p) = \frac{2\omega}{p^2+4\omega^2}.$$

La multiplication par t se traduisant en Laplace par une dérivation, on en déduit l'expression de la transformée de $t \mapsto t\sin(2\omega t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\cdot\sin(2\omega\cdot)\right](p) &= -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[\sin(2\omega\cdot)\right](p) \\ &= -\frac{d}{dp}\frac{2\omega}{p^2+4\omega^2} = \frac{4\omega p}{\left(p^2+4\omega^2\right)^2} \end{aligned}$$

Nota : $\mathcal{L}\left[\cdot\sin(2\omega\cdot)\right]$ est une notation rigoureuse pour ce que l'on écrit familièrement $\mathcal{L}\left[t\sin(2\omega t)\right]$, qui n'est pas correcte ; l'écriture $\cdot\sin(2\omega\cdot)$ signifie la fonction $t \mapsto t\sin(2\omega t)$.