Remarque importante : lorsqu'on écrit $x, y \in E$, cela signifie que x et y sont deux éléments de l'espace vectoriel E. Il s'agit d'une notation générique, en aucun cas cela signifie que x et y représentent des composantes d'un vecteur. Si $E = \mathbb{R}^n$, alors x et y seront tous deux des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, possédant chacun n composantes que l'on pourra noter $x_1, ..., x_n$ et $y_1, ..., y_n$. Les sources de confusion sont nombreuses : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on note souvent (x, y) les **coordonnées** d'un vecteur. De plus, $x_1, ..., x_n$ peut dans certains cas désigner un ensemble de n vecteurs de E et non pas les coordonnées d'un vecteur ! Il est donc impératif de bien garder en tête les objets que l'on manipule et les notations que l'on a décidé de leur attribuer.

Espaces vectoriels, familles, bases

Exercice 1 Méthode 1 : avec la définition d'un e.v (trivial car tout se remène à la structure d'e.v. que possède $\mathbb{R}$). Les lois + et . sur les espaces de fonctions ont été définies lors du premier cours.

- CANS :
  - $\forall f, g \in E_1$, $f + g = g + f$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$.
  - $\forall f, g, h \in E_1$, $(f + g) + h = f + (g + h)$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$.
  - Il existe un élément neutre noté 0_{E_1} (que l'on définit par $\forall x \in \mathbb{R}$, $0_{E_1}(x) := 0$), appartenant à E_1 car appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifiant $f'' + f = 0$; il est bien tel que $\forall f \in E_1$, $0_{E_1} + f = f$.
  - $\forall f \in E_1$, il existe un élément de E_1 noté $(-f)$ que l'on définit par $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-f)(x) := -f(x)$ et qui est donc tel que $f + (-f) = 0_{E_1}$. L'élement noté $(-f)$ appartient évidemment à E_1 puisque f appartient à E_1 (il est donc $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie l'eq. différentielle).

- La loi externe . vérifie :
  - $\forall f \in E_1$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda + \mu).f = \lambda.f + \mu.f$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $((\lambda + \mu).f)(x) = (\lambda + \mu)\, f(x)$ par définition de ., et donc $((\lambda + \mu).f)(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda.f)(x) + (\mu.f)(x)$
  - même démarche pour $\lambda.(f + g) = \lambda.f + \lambda.g$, $(\lambda\mu).f = \lambda.(\mu.f)$ et $(1_{\mathbb{R}}.f) = f$.

On a ainsi démontré tous les axiomes d'un espace vectoriel.

Méthode 2 : utiliser la notion de sous-espace vectoriel. On suppose évidemment acquis le fait que l'espace $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Il reste à vérifier les axiomes de s.e.v : $E_1 \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et il est non vide car $0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_1$ (car $0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ vérifie évidemment $f'' + f = 0$). On montre alors la stabilité de E_1 par combinaison linéaire : $\forall f, g \in E_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

- $\lambda.f + g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- Car l'opération de dérivation est linéraire, on a $(\lambda.f + g)'' + (\lambda.f + g) = \lambda.f'' + g'' + (\lambda.f + g) = \lambda.(f'' + f) + g'' + g = \lambda.0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} + 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Ainsi, E_1 est un s.e.v de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; c'est donc un e.v.

Méthode 3 : On montre que E_1 est le noyau d'une application linéaire. En effet, $E_1 = \ker(\varphi)$ avec $\varphi : f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f'' + f$, qui est bien une application linéaire car $\varphi(\lambda.f + g) = \lambda.\varphi(f) + \varphi(g)$ d'après le dernier point de la méthode 2. Ainsi, E_1 est un s.e.v de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2

1. – Cette famille (notée v_1, v_2, v_3) est-elle libre ? Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 \\ -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

   Elle est donc libre.

   – Est-ce une base ? Methode 1 : c'est une famille libre maximale (i.e : 3 vecteurs dans un espace de dimension 3), c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ (elle est nécessairement génératrice).
   Methode 2 : on montre que la famille est génératrice, c'est-à-dire qu'il nous faut montrer que tout élément $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3, c'est-à-dire montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, soit :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ z = \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = y - \lambda_3 \\ z = y + \lambda_3 \\ x = \lambda_1 + 2\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = z - y \\ \lambda_2 = 2y - z \\ \lambda_1 = x - 2z + 2y. \end{cases}$$

   On a bien montré que la famille est génératrice ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

   Remarque : Dans ce dernier calcul, on a en fait montré que pour tout u de $\mathbb{R}^3$, il existe **un unique** triplet $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, ce qui prouve directement que la famille est une **base** !

2. On utilise la question précédente pour calculer les coefficients de la décomposition du vecteur $(2, 2, 2)$ dans la base v_1, v_2, v_3 :

$$\begin{cases} \lambda_3 = z - y = 2 - 2 = 0 \\ \lambda_2 = 2y - z = 4 - 2 = 2 \\ \lambda_1 = x - 2z + 2y = 2 - 4 + 4 = 2. \end{cases}$$

   Le vecteur $(2, 2, 2)$ est égal à $2v_1 + 2v_2 + 0v_3$ et s'écrit dans la base : $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{(v_1, v_2, v_3)}$.

Exercice 3

– $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$ et

   1. On a $F = \ker(\varphi)$ où $\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x + t \ , \ x + y + z)$ est une application linéaire, donc F est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$.

2. $u=(x,y,z,t)\in F \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t-z \end{cases}$, donc

$$u=\begin{pmatrix} -t \\ t-z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2},$$

donc $u\in$Vect(v_1,v_2) (cad v_1,v_2 engendre F). La famille est-elle libre ? Soient $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Alors, $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ (évident). La famille est donc libre et génératrice : c'est une base de F, qui est de dimension 2 (deux vecteurs de base).

– $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ y=x \text{ et } x+y+z=0\}$.

1. On a $G=\ker(\psi)$ où $\psi : (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mapsto (y-x\ ,\ x+y+z)$ est une application linéaire, donc G est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. $u=(x,y,z)\in G \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-2x \end{cases}$, donc

$$u=\begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_1},$$

donc $u\in$Vect(v_1) (cad v_1 engendre G). La famille est-elle libre ? Soit $\lambda_1\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $\lambda_1=0$ (évident). La famille est donc libre et génératrice : c'est une base de G, qui est de dimension 1 (un vecteur de base).

Applications linéaires et matrices

Exercice 4 Soit f définie par :

$$f(x,y,z,t)=(x+t, x+y+z).$$

1. Soient $u=(x_1,y_1,z_1,t_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2,t_2)$ des éléments de $\mathbb{R}^4$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que
$$f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v).$$
On a :
$$\begin{aligned} f(\lambda u+v) &= \begin{pmatrix} \lambda x_1+x_2+\lambda t_1+t_2 \\ \lambda x_1+x_2+\lambda y_1+y_2+\lambda z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1+t_1)+(x_2+t_2) \\ \lambda(x_1+y_1+z_1)+x_2+y_2+z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1+t_1) \\ \lambda(x_1+y_1+z_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_2+t_2) \\ x_2+y_2+z_2 \end{pmatrix} = \lambda f(u)+f(v). \end{aligned}$$

2. $\ker(f)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ f(x,y,z,t)=(0,0)\} = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x+t=0 \text{ et } x+y+z=0\} = F$. Une base v_1,v_2 de F a été donnée dans l'exercice précédent.

3. Méthode 1 : $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 2$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. On peut prendre comme base la base canonique.

   Méthode 2 : On note e_i la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\
&= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{liés}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Or ces 3 vecteurs sont liés car $(1,1) = (0,1) + (1,0)$, donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2 \text{ (car deux vecteurs libre dans } \mathbb{R}^2 \text{ engendrent } \mathbb{R}^2).$$

   Méthode 3 : $v = (v_1, v_2) \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si il existe un élement $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $v = f(u)$.

$$v \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = v_1 \\ x + y + z = v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v_1 - t \\ y = v_2 - v_1 + t - z. \end{cases}$$

   Ainsi, $\forall v \in \mathrm{Im}(f)$, on a exprimé $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $v = f(u)$ (une infinité en fait) sans aucune contrainte sur v, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

4. Non : f est surjective ($\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$) mais pas injective (car $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$), elle n'est donc pas bijective.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$

1. (a) $$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} & \end{array}.$$

   (b) Méthode 1 :avec l'expression de f : $f(1,1,2,-1) = (2,-2,6)$

   Methode 2 : en utilisant $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$: $f(1,1,2,-1) = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

   (a) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0. \end{cases}.$$

   La famille est donc libre et maximale (4 éléments dans $\mathbb{R}^4$), c'est une base.

(b) Méthode 1 : calcul direct

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) \end{array} & \end{array}$$

Méthode 2 : Calculons la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} & \end{array}$$

"transforme" un vecteur exprimé en base $\mathcal{B}$ en un vecteur en base $\mathcal{E}$.

Alors :

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\ P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $[f(v)]_{\mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}\ [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$

Remarque : On peut également le voir différemment et noter que $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}\ [v]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\ P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\ [v]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\ [v]_{\mathcal{E}}$; on constate alors que ce vecteur v exprimé $(1,0,1,-3)$ en base $\mathcal{B}$ n'est autre que le vecteur $(1,1,2,-1)$ (en base canonique) de la question 1b car $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\ [v]_{\mathcal{B}} = (1,1,2,-1)$.

Réduction d'endomorphismes

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{E}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$f(x,y,z) \mapsto (11x - 5y + 5z, -5x + 3y - 3z, 5x - 3y + 3z).$$

1. (a) $A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \end{array}$

(b) $\ker(A) = \left\{X \in \mathbb{R}^3\ /\ AX = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$. Soit $X = (x,y,z)$ un élément de $\ker(A)$. Alors :

$$AX \quad = \quad 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{11}{5}x + z \\ -5x + \frac{33}{5}x + 3z - 3z = 0 \\ 5x - \frac{33}{5}x - 3z + 3z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{11}{5}x + z \\ x = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right. .$$

Ainsi, $X \in \ker(A) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=v_1, \text{ base de } \ker(A)}$. Le noyau de A est donc différent de $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et par suite f est non injective.

(c) Non car $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$ par le théorème du rang, donc $\mathrm{Im}(A) \neq \mathbb{R}^3$. Un autre moyen est de noter que les lignes de la matrices A sont liées (car les deuxième et troisième lignes sont opposées), donc $rg(A) \leqslant 2$.

2. On se propose de diagonaliser, si possible, la matrice A, c'est-à-dire de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f soit diagonale.

(a) Les valeurs propres de A sont les racines du polynome caractéristique p_A :

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (11-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -5 & 3-\lambda \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\
&= (11-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 9\right) + 5\left(-5(3-\lambda) + 15\right) + 5\left(15 - 5(3-\lambda)\right) \\
&= (11-\lambda)(-\lambda)(6-\lambda) + 25\lambda + 25\lambda = \lambda(50 - (6-\lambda)(11-\lambda)) \\
&= \lambda(-\lambda^2 + 17\lambda - 16) = \lambda(\lambda-1)(16-\lambda).
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont 0, 1 et 16.

(b) On a 3 sous-espaces propres à déterminer :

$$\begin{aligned}
E_0 &= \ker(A - 0I_3) = \ker(A) \text{ --> cf question 1b, base } v_1 \\
E_1 &= \ker(A - I_3) \\
E_{16} &= \ker(A - 16\, I_3).
\end{aligned}$$

– Détermination de E_1 :

$$\begin{aligned}
X &= (x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = X \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 5y + 5z = x \\ -5x + 3y - 3z = y \\ 5x - 3y + 3z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ -5x + 4x + 2z - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ x = -z \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ 0 = 0 \text{ --> inutile} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=v_2, \text{ base de } E_1}.
\end{aligned}$$

– Détermination de E_{16} :

$$\begin{aligned}
X &= (x,y,z) \in E_{16} \Leftrightarrow (A - 16\, I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = 16X \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11x - 5y + 5z = 16x \\ -5x + 3y - 3z = 16y \\ 5x - 3y + 3z = 16z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y - z \\ -5x + 5y - 16y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - 13z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y - z \\ y = -z \\ 5x - 3y - 13z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2z \\ y = -z \\ 0 = 0 \text{ --> inutile} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:= v_3,\text{ base de } E_{16}} .
\end{aligned}$$

(c) La matrice A est diagonalisable. En effet, le p_A est scindé dans $\mathbb{R}$, et la multiplicité des valeurs propres (1 car ce sont des racines simples) est égale à la dimension de chaque sous espace propre E_i associé (égale à 1 pour tous les sous-espaces propres puisqu'ils ont un seul vecteur de base).

La base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise A. On calcule alors les matrices de passage en jeu dans cette dingonalisation :

$$P = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = (\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,)_{\mathcal{E}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \end{array} .$$

Pour calculer la matrice inverse P^{-1}, il faut inverser le système reliant les vecteur v_i et les vecteurs e_i. On a :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 0e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = -e_1 - e_2 + e_3 \\ v_3 = 2e_1 - e_2 + e_3 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_2 = v_1 - e_3 \\ e_1 = -v_2 - (v_1 - e_3) + e_3 = 2e_3 - v_1 - v_2 \\ v_3 = 4e_3 - 2v_1 - 2v_2 - v_1 + 2e_3 = 6e_3 - 3v_1 - 2v_2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_3 = \frac{1}{6}\,(3v_1 + 2v_2 + v_3) \\ e_2 = -\frac{1}{6}\,(-3v_1 + 2v_2 + v_3) \\ e_1 = -\frac{2}{6}v_2 + \frac{2}{6}v_3 \end{array} \right. ,
\end{aligned}$$

d'où :

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = (\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3 \,)_{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \end{array} .$$

On a alors la relation entre la matrice diangonale des valeurs propre et A suivante :

$$D := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}}_{\text{matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}} = P^{-1}AP.$$

En pratique comme en théorie, la notion de diagonalisation de matrice (et de manière générale de réduction d'endomorphisme) est très importante, car elle permet de transformer un problème faisant intervenir la matrice A en un problème simplifié équivalent faisant intervenir la matrice diagonale D, en utilisant la relation ci-dessus. Pour ne citer qu'eux : calcul matriciel en tout genre, résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires etc.