EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
DURÉE: 2H

L3 UPSSITECH GCGEO *15 janvier 2015*

Les documents et téléphones portables sont interdits.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Pourquoi peut-on affirmer que cette matrice est diagonalisable ? De quelle propriété peut bénéficier la base de vecteurs propres que l'on construira ? Quelle intérêt calculatoire pratique cela a-t-il ?
2. Calculer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont $-3, -3$ et 3.
3. Calculer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres en prenant soin de les choisir en accord avec ce qui aura été dit dans la question 1.
4. Donner l'expression de la matrice de passage P et la relation entre P, A, et la matrice diagonale D.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Soit la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x\, g(x, y) \\ h(x)\, e^{2y} \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

où $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}; \mathbb{R})$.

1. Exprimer la jacobienne de f en fonction des dérivées partielles de g et h.
2. Quelle relation doivent satisfaire g et h pour avoir $\operatorname{div} f = 0$?
3. On considère désormais que $h(x) = \frac{1}{x}$. Donner une expression de $g(x, y)$ satisfaisant la condition établie dans la question 2.
4. Donner enfin l'expression finale de la Jacobienne $J_f(x, y)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Par temps calme, on peut considérer que la pression p et la température T de l'air sont liées à l'altitude z selon la relation :

$$z(T, p) = \alpha T(\ln p - \ln p_0), \tag{2}$$

où α et p_0 sont des constantes strictement positives.

1. Donner l'expression de la différentielle de la fonction $z(T, p)$.

2. En utilisant la notation différentielle, donner une relation entre une variation (infinitésimale) de température dT, une variation de pression dp, et la variation d'altitude dz correspondante.

Exercice 4 On souhaite calculer le flux du champs de vecteurs $E(x, y, z) = (xz, 0, 0)$ à travers le paraboloïde d'équation $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, noté Σ et représenté en Figure 1.

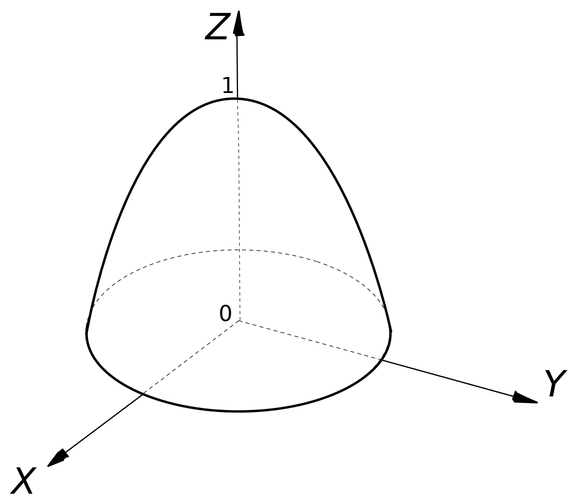

FIGURE 1 – Surface paraboloïde Σ.

1. Après avoir défini le paramétrage (trivial) de cette surface, calculer l'expression de la normale en tout point de Σ.
2. Calculer le flux de E à travers Σ.
3. Retrouver ce résultat par le théorème de la divergence (Ostrogradsky). On utilisera pour cela un changement de variable en coordonnées cylindriques.
   N.B. On prendra soin au préalable d'exprimer les bornes du volume d'intégration pour ce nouveau système de coordonnées.