Examen de mathématiques

Durée: 2h

L3 UPSSITECH GCGEO *15 janvier 2016*

Les documents et téléphones portables sont interdits.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1 Soit le champs de vecteur :

$$U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos y \\ -x\sin y + ze^{yz} \\ ye^{yz} + \dfrac{1}{1+z^2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Ce champs dérive-t-il d'un potentiel, i.e. peut-on trouver une fonction <u>à valeur scalaire</u> $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $U(x,y,z) = \nabla G(x,y,z)$? (trouver la fonction scalaire qui a pour gradient U).
2. Calculer la Hessienne de $G(x,y,z)$.

Exercice 2 On considère le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$, noté Σ et représenté en Figure 1. On notera avec profit qu'un système de coordonnées cylindrique peut s'avérer utile avec ce type de géométrie.

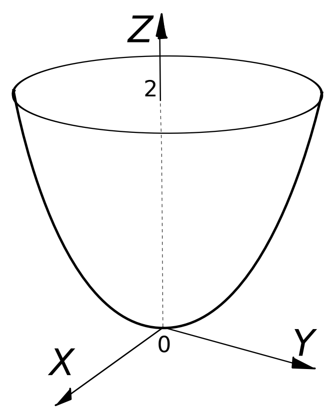

Figure 1 – Surface paraboloïde Σ.

On souhaite calculer le flux du champs $E = (0, y^2, z)$ traversant la surface (fermée) Σ.

1. Ecrire le théorème de la divergence (i.e. d'Ostrogradsky) appliqué à ce volume, et l'utiliser pour calculer ce flux (le choix est libre quant à la méthode utilisée).
   N.B. On prendra soin de <u>rigoureusement</u> détailler chacune des étapes impliquées dans le calculs (paramétrisations et/ou changements de variables).
2. *(facultatif)* Retrouver le résultat en calculant l'autre membre de l'égalité.

Exercice 3 On souhaite calculer l'intégrale :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{2x+y^2}\, dxdy, \tag{2}$$

où $\mathcal{D}$ est représenté Figure 2.

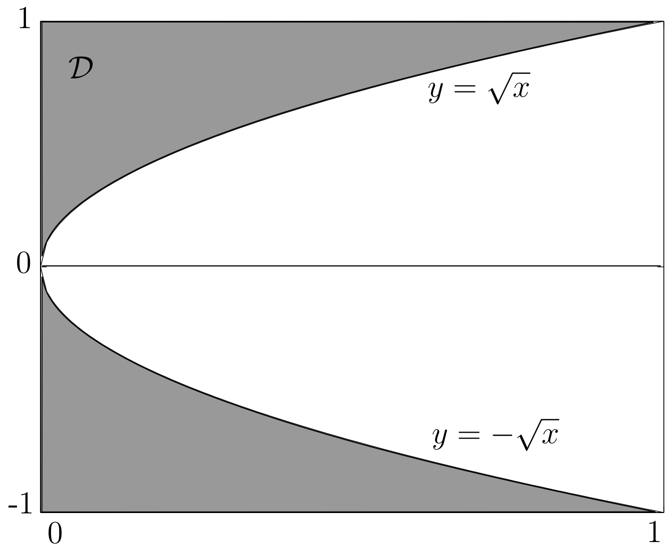

FIGURE 2 – Domaine d'intégration D (**grisé !**), dans le plan (x,y).

1. Donner une expression mathématique judicieuse des bornes du domaine $\mathcal{D}$.
2. Cacluler l'intégrale I.

Exercice 4 Soit la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto L\,(\,2x+y\,,\,\cos(xyz)\,), \end{array} \tag{3}$$

où $L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Calculer $Df(x,y,z)$ en fonction des dérivées partielles de L.

Exercice 5 Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer ses valeurs propres de M et montrer qu'elles sont 3 et -3 (l'une étant double).
2. <u>En déduire</u> les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *(facultatif)* Calculer les vecteurs propres de A et la diagonaliser (i.e. donner l'expression des matrices P et D, et donner la relation entre P, A et D).
N.B. Attention : on travaille dans $\mathbb{R}^4$!